Übungen zu Krümmungsproblemen

Blatt 2

Sei $f \in C^{m,\alpha}(\Gamma)$, $m \geq 2$, $0 < \alpha < 1$, symmetrisch, (M, g) eine n–dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und F die zugehörige Krümmungsfunktion in $\mathcal{S}_\Gamma \subset T^{0,2}(M)$. Beweisen Sie bitte

1 Sei $h_{ij} \in \mathcal{S}_\Gamma$ und definieren wir $F(h^i_j)$ durch

$$F(h^i_j) = F(h_{ij}), \tag{0.1}$$

dann ist dieses F ebenfalls von der Klasse $C^{m,\alpha}$ und

$$F^j_i = \frac{\partial F}{\partial h^i_j} = g_{ik} F^{jk}. \tag{0.2}$$

2 Fassen wir g_{ij} als zweite unabhängige Variable auf $F = F(h_{ij}, g_{kl})$, so ist F in beiden Variablen von der Klasse $C^{m,\alpha}$ und es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial g_{ij}} = -F^i_k h^{kj}. \tag{0.3}$$

3 Berechnen Sie entsprechend die zweiten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 F}{\partial g_{ij} \partial g_{kl}}. \tag{0.4}$$