Übungen zu Krümmungsproblemen

Blatt 1

Das Symbol H_k repräsentiert sowohl das elementarsymmetrische Polynom k-ter Ordnung, das in $\mathbb{R}^n$ bzw. in dem Kegel $\varGamma_k$

(0.1) $\varGamma_k = \{\, \kappa \in \mathbb{R}^n \colon H_1(\kappa) > 0 \quad \wedge \quad H_2(\kappa) > 0 \quad \wedge \quad \cdots \quad \wedge \quad H_k(\kappa) > 0 \,\}$

definiert ist, als auch die Funktion, die auf den zulässigen symmetrischen Tensoren in $T^{0,2}(M)$ definiert ist, wobei $M = (M, g)$ eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit ist. Wir setzen $H_0 = 1$.

1 Definiere für $1 \le i \le n$ und $\kappa \in \mathbb{R}^n$ $H_{k,i}(\kappa)$ als die Summe derjenigen Terme in $H_k(\kappa)$, die nicht die Komponente κ^i enthalten. Beweisen Sie dann bitte

$$H_{k,i} = \frac{\partial H_{k+1}}{\partial \kappa^i}, \tag{0.2}$$

$$H_{k+1} = H_{k+1,i} + \kappa^i H_{k,i}, \tag{0.3}$$

$$\sum_{i=1}^n H_{k,i} = (n-k) H_k, \tag{0.4}$$

$$\sum_{i=1}^n \kappa^i H_{k,i} = (k+1) H_{k+1}, \tag{0.5}$$

$$\sum_{i=1}^n (\kappa^i)^2 H_{k,i} = H_1 H_{k+1} - (k+2) H_{k+2}. \tag{0.6}$$

2 Sei $1 \le k \le n$ und $\kappa \in \varGamma_k$, dann gilt für alle $1 \le i \le n$ und $0 \le h \le k-1$

$$H_{h,i}(\kappa) > 0. \tag{0.7}$$

3 Sei $1 \le i \le n$ fest, dann gilt

$$D_i D_i H_k = 0 \qquad \forall\, 1 \le k \le n. \tag{0.8}$$

4 Sei $F = H_k$ definiert in $T^{0,2}(M)$, $F = F(h_{ij})$. Bestimmen Sie

$$F^{ij} \quad \wedge \quad F^{ij,kl} \tag{0.9}$$

für $k \in \{1, 2, n\}$. Versuchen Sie dabei, nicht auf die Definitionen der H_k in $\mathbb{R}^n$ zurückzugreifen, sondern definieren Sie

$$H_1 = H = g^{ij} h_{ij}, \tag{0.10}$$

$$H_2 = \tfrac{1}{2}(H^2 - |A|^2) \quad \wedge \quad |A|^2 = h^{ij} h_{ij}, \tag{0.11}$$

$$H_n = \frac{\det h_{ij}}{\det g_{ij}}. \tag{0.12}$$

Im Falle $F = H_n$ verwenden Sie auch, daß die Hauptkrümmungen alle strikt positiv sind.