BV-FUNCTIONS

CLAUS GERHARDT

ABSTRACT.

CONTENTS

1. INTRODUCTION

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT, INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK, IM NEUENHEIMER FELD 294, 69120 HEIDELBERG, GERMANY
E-mail address: gerhardt@math.uni-heidelberg.de
URL: http://web.me.com/gerhardt/

Date: May 18, 2011.
2000 *Mathematics Subject Classification.* 35J60, 53C21, 53C44, 53C50, 58J05.
Key words and phrases. BV-functions, traces, approximations, Theorem of Gagliardo.
This work has been supported by the DFG.

1.3.6 Definition (Funktionen von beschränkter Variation).

$$BV(\Omega) := \{ v \in L^1(\Omega) : Dv = \text{beschränktes Maß} \}$$

$BV(\Omega)$ ist Banachraum mit Norm

$$\int_\Omega |v| + \int_\Omega |Dv|,$$

wobei

$$\int_\Omega |Dv| = \sup \{ \int_\Omega v D_i \varphi^i : |(\varphi^1, ..., \varphi^n)| \leq 1, \varphi^i \in \mathcal{D}(\Omega$$

Beweis, daß $BV(\Omega)$ BR folgt später

$H^{1,1}(\Omega)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $BV(\Omega)$.

- Einschub -

1.3.7. Lemma

Sei $v_j \to v$ in $L^1(\Omega)$ $\Longrightarrow$

$$\int_\Omega |Dv| \leq \underline{\lim} \int_\Omega |Dv_j|$$

Beweis: klar

1.5.7 u Satz

BV(Ω) ist ein Banachraum

Bew: (v_j) eine C.F. in BV(Ω) $\Rightarrow$

(i) $v_j \to v$ in $L^1(\Omega)$

(ii) Ferner ist $\|v_j\|_{BV}$ beschränkt $\Rightarrow$

$$\int_\Omega |Dv| \leq \underline{\lim} \int_\Omega |Dv_j| < \infty$$

$\Rightarrow v \in BV(\Omega)$

(iii) Zeige noch

$$\int_\Omega |Dv - Dv_j| \to 0.$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$, daß

$$k, j > N \Rightarrow \int_{\Omega} |D(v_j - v_k)| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$

$$\int_{\Omega} |D(v_j - v)| \leq \varliminf_{k} \int_{\Omega} |D(v_j - v_k)| < \varepsilon$$

$\forall j > N$ qed.

1.3.8 Theorem

Sei $v \in BV(\Omega)$. Dann existiert eine Folge (v_j) in $C^\infty(\Omega)$, so daß

$$\lim \int_\Omega |v_j - v| = 0$$

und

$$\lim \int_\Omega |Dv_j| = \int_\Omega |Dv|$$

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$. Wir werden zeigen, daß es $v_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$ gibt mit

$$\int_\Omega |v - v_\varepsilon| < \varepsilon \text{ und } \left| \int_\Omega |Dv| - \int_\Omega |Dv_\varepsilon| \right| < 3\varepsilon.$$

Da $|Dv|$ ein Radonmaß ist, gibt es eine Zahl

$m > 0$, so daß, wenn

$$\Omega_0 := \{ x \in \Omega : d(x) > \tfrac{1}{m} \}$$

$$\int_{\Omega - \Omega_0} |Dv| < \varepsilon$$

Definiere nun $\cancel{\Omega_{-1} = \emptyset}$ $\Omega_{-1} = \emptyset$,

$$\Omega_k := \{ x \in \Omega : d(x) > \frac{1}{k+m} \}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$\Longrightarrow$

$$\cancel{\Omega_{-1} \subset\subset}\ \Omega_0 \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \cdots \subset\subset \Omega$$

and

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Omega_i$$

Setze $A_1 = \Omega_2$ und

$$A_i := \Omega_{i+1} - \overline{\Omega}_{i-1} \qquad i \geq 2$$

Dann ist (A_i) eine offene lokal endliche Überdeckung von Ω. Sei (φ_i) eine untergeordnete Zerlegung der Eins, und sei η ein Mollifier, so daß

$$\int_\Omega |\eta_\varepsilon * (v\cdot\varphi_i) - v\cdot\varphi_i| \longrightarrow 0$$

$$\int_\Omega |\eta_\varepsilon * (v\, D\varphi_i) - v\cdot D\varphi_i| \longrightarrow 0$$

Zu jedem i wähle $0 < \varepsilon_i$ so klein, daß

(1) $\operatorname{supp} \eta_{\varepsilon_i} * (v\cdot\varphi_i) \subset \Omega_{i+2} - \bar{\Omega}_{i-2}$

und

(2) $\int_\Omega |\eta_{\varepsilon_i} * (v\cdot\varphi_i) - v\cdot\varphi_i| < \varepsilon\, 2^{-i}$

(3) $\int_\Omega |\eta_{\varepsilon_i} * (v\, D\varphi_i) - v\, D\varphi_i| < \varepsilon\cdot 2^{-i}$

Definiere nun

$$\vartheta_\varepsilon := \sum_{i=1}^{\infty} \eta_{\varepsilon_i} * (v \cdot \varphi_i)$$

(1) $\Rightarrow$ Summe ist lokal endlich

$\Rightarrow \vartheta_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$

(2) $\Rightarrow$

$$\int_\Omega |\vartheta_\varepsilon - v| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega |\eta_{\varepsilon_i} * (v \cdot \varphi_i) - v \cdot \varphi_i| < \varepsilon$$

Ferner ist

$$D v_\varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_{\varepsilon_i} * (\varphi_i D v) + \sum_{i=1}^{\infty} \eta_{\varepsilon_i} * v D\varphi_i$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \eta_{\varepsilon_i} * (\varphi_i D v) + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\eta_{\varepsilon_i} * v D\varphi_i - v D\varphi_i\right]$$

(3) $\Rightarrow$ daher

$$\cancel{|}\int_\Omega |Dv_\varepsilon| - \int_\Omega |Dv|\cancel{|} \le \left| \int_\Omega \eta_{\varepsilon_1} * \varphi_1 |Dv| - \int_\Omega |Dv| \right|$$

$$+ \sum_{i=2}^{\infty} \int_\Omega \eta_{\varepsilon_i} * \varphi_i |Dv| + \varepsilon .$$

1.5.9

Nun ist (vgl. Lemma 1.3.9 unten)

$$\int_\Omega \eta_{\varepsilon_i} * \varphi_i |Dv| = \int_\Omega \varphi_i |Dv| \qquad \forall i = 1, 2, \dots$$

$\Rightarrow$

$$\cancel{|}\int_\Omega |Dv_\varepsilon| - \int_\Omega |Dv|\cancel{|} \le - \int_\Omega (\cancel{1-\varphi_1}) \cdot |Dv| + \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega \varphi_i |Dv| + \varepsilon$$

$$\le \int_\Omega (1-\varphi_1) \cancel{|Dv|} + \int_{\Omega - \Omega_0} \cancel{|Dv|} + \varepsilon$$

Da $\varphi_1 = 1$ auf Ω_0, folgt die somit die Behauptung, denn

$$\int_\omega |Dv| \le \underline{\lim} \int_\omega |D v_\varepsilon| \le \overline{\lim} \int_\omega |D v_\varepsilon| \le \int_\omega |Dv| + 3\varepsilon$$

1.3.9 Lemma

Sei $\mu \in \mathcal{D}'$ ein pos. Maß mit kompaktem Träger und sei η ein Mollifier, dann ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta * \mu = \int_{\mathbb{R}^n} \mu$$

Beweis:

Sei

$$\mu_\varepsilon := \mu * \eta_\varepsilon$$

Dann ist

$$\cancel{\int_{\mathbb{R}^n} \eta * \mu_\varepsilon \le \int_{\mathbb{R}^n} \mu}$$

da

$$\langle \eta\mu_\varepsilon, \varphi \rangle = \langle \mu, \tilde{\eta}_\varepsilon * \varphi \rangle \leq \|\mu\| \cdot \|\varphi\|_\infty$$

Andererseits ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta * \mu_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(x-y)\, \mu_\varepsilon(y)\, dy\, dx$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \mu_\varepsilon(y)\, dy$$

$\Rightarrow$

$$\underline{\int_{\mathbb{R}^n} \eta * \mu_\varepsilon} = \int_{\mathbb{R}^n} \eta * \eta_\varepsilon * \mu = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon * \eta * \mu$$

$$\underline{\leq \int_{\mathbb{R}^n} \eta * \mu}$$

$\Rightarrow$

$$\|\mu_\varepsilon\| \leq \|\eta * \mu\| \leq \|\mu\|$$

Andererseits ist

$$\|\mu\| \le \underline{\lim} \|\mu_\varepsilon\|$$

$$\Rightarrow \quad \|\mu\| = \|\gamma + \mu\|$$ qed.

1.3.10 Lemma

Sei $v \in BV(\Omega)$ und $v_\varepsilon \in H^{1,1}(\Omega)$ mit

$$v_\varepsilon \to v \quad L^1(\Omega)$$

und

$$\int_\Omega |Dv_\varepsilon| \to \int_\Omega |Dv|$$

Dann gilt

(i) $\int_{\Omega'} |Dv_\varepsilon| \to \int_{\Omega'} |Dv| \quad \forall\, \Omega' \subset\subset \Omega,\ \partial\Omega' \in Lip$
$\int_{\partial\Omega'} |Dv| = 0.$

und $\int_{\Omega - \overline{\Omega}'} |Dv_\varepsilon| \to \int_{\Omega - \overline{\Omega}'} |Dv|$

(ii) Sei Ω' wie in (i) und $g \in C^0(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow$

$$\int_{\Omega'} g \cdot D_i v_\varepsilon \longrightarrow \int_{\Omega'} g\, D_i v \qquad 1 \le i \le n.$$

Beweis:

(i) $$\int_\Omega |Dv| = \int_{\Omega'} |Dv| + \int_{\Omega - \bar{\Omega}'} |Dv| + \int_{\partial \Omega'} |Dv| =$$

$$= \int_{\Omega'} |Dv| + \int_{\Omega-\bar{\Omega}'} |Dv| \le \underline{\lim} \int_{\Omega'} |Dv_\varepsilon| + \underline{\lim} \int_{\Omega-\bar{\Omega}'} |Dv_\varepsilon| \le$$

$$\le \overline{\lim} \int_{\Omega'} |Dv_\varepsilon| + \underline{\lim} \int_{\Omega-\bar{\Omega}'} |Dv_\varepsilon| \le$$

$$\le \lim \left\{ \int_{\Omega'} |Dv_\varepsilon| + \int_{\Omega-\bar{\Omega}'} |Dv_\varepsilon| \right\} = \lim \int_\Omega |Dv_\varepsilon| = \int_\Omega |Dv|$$

$\Longrightarrow$

$$\int_{\Omega'} |Dv| = \lim \int_{\Omega'} |Dv_\varepsilon|$$

und entsprechend

$\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_{\Omega-\bar{\Omega}'} |Dv| = \lim \int_{\Omega-\bar{\Omega}'} |Dv_\varepsilon|$, klar

(ii) Da $g \cdot \chi_{\Omega'}$ eine Borelfunktion ist, ist $\int_{\Omega'} g\, D_i v$ wohldefiniert. Ferner sieht man unschwer, daß

$$\int_{\Omega'} \varphi\, D_i v_\varepsilon \to \int_{\Omega'} \varphi\, D_i v \qquad \forall \varphi \in C_c^0(\Omega')$$

Sei $r > 0$ und $\Omega'_r := \{x \in \Omega' : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega') < r\}$

und sei $\Gamma_r = \{x \in \Omega' : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega') = r\}$.

Dann gilt bis auf h. a. viele r

$$\int_{\Gamma_r} |Dv| = 0$$

Sei $N \subset \mathbb{R}_+$ die Menge dieser r; betrachte im folgenden nur $r \notin N$.

Sei $g_r \in C_c^0(\Omega')$ mit $\|g_r\|_\infty \le \|g\|_\infty$

und

$$g_r\big|_{\Omega' \setminus \Omega'_r} = g$$

Dann gilt

$$\int_{\Omega'} |g - g_r| \cdot |D v_\varepsilon| \le \cancel{\int_{\Omega_r}} \; 2 \cdot \|g\|_\infty \cdot \int_{\Omega'_r} |D v_\varepsilon|$$

und

$$\int_{\Omega'} |g - g_r| \cdot |D v| \le 2 \cdot \|g\|_\infty \cdot \int_{\Omega'_r} |D v|$$

Sei nun $\delta > 0$. Wähle $r \in N$ so klein, daß

$$\int_{\Omega'_r} |D v| < \frac{\delta}{4 \cdot \|g\|_\infty}$$

Dann ist auch

$$\int_{\Omega'_r} |D v_\varepsilon| < \frac{\delta}{4 \cdot \|g\|_\infty}$$

für $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Für solche ε ist ferner

$$\left| \int_{\Omega'} g \, D_i v_\varepsilon - \int_{\Omega'} g \, D_i v \right| \leq \int_{\Omega'} |g - g_r| \cdot |D v_\varepsilon|$$

$$+ \int_{\Omega'} |g - g_r| \cdot |D v| + \left| \int_{\Omega'} g_r \, D_i v_\varepsilon - \int_{\Omega'} g_r \, D_i v \right|$$

$< 2 \cdot \delta$, falls ε hinreichend klein.

1.3.17 Lemma

Sei (v_ε) eine Folge in $BV(\Omega)$, so daß

$$v_\varepsilon \to v \quad \text{in } L^1(\Omega)$$

und

$$\int_\Omega |Dv_\varepsilon| \to \int_\Omega |Dv|$$

Dann gilt für jede offene Menge $\Omega' \subset \Omega$

$$\int_{\overline{\Omega'}\cap\Omega} |Dv| \geq \overline{\lim} \int_{\overline{\Omega'}\cap\Omega} |Dv_\varepsilon| .$$

Ist insbesondere

$$\int_{\partial\Omega'\cap\Omega} |Dv| = 0 ,$$

so folgt

$$\int_{\Omega'} |Dv| = \lim \int_{\Omega'} |Dv_\varepsilon| .$$

Beweis:

Sei $A := \Omega - \overline{\Omega'}$. $\Rightarrow$

$$\int_A |Dv| \le \underline{\lim} \int_A |Dv_\varepsilon|$$

und

$$\int_{\Omega'} |Dv| \le \underline{\lim} \int_{\Omega'} |Dv_\varepsilon|$$

Andererseits ist

$$\int_{\overline{\Omega'} \cap \Omega} |Dv| + \int_A |Dv| = \int_\Omega |Dv| = \lim \int_\Omega |Dv_\varepsilon| =$$

$$= \lim \Big\{ \int_{\overline{\Omega'} \cap \Omega} |Dv_\varepsilon| + \int_A |Dv_\varepsilon| \Big\} \ge \overline{\lim} \int_{\overline{\Omega'} \cap \Omega} |Dv_\varepsilon| +$$

$$+ \underline{\lim} \int_A |Dv_\varepsilon| \ge \overline{\lim} \int_{\overline{\Omega'} \cap \Omega} |Dv_\varepsilon| + \int_A |Dv|$$

qed.

1.3.14 Lemma

Sei

$$C_R^+ = B'(0,R) \times (0,R) \equiv B'_R \times (0,R)$$

und

$$C_R = B'_R \times (-R,R)\,;$$

und sei $v \in BV(C_R^+)$. Dann existiert eine Funktion $v^+ \in L^1(B'_R)$, so daß für H_{n-1}-fast alle $\xi \in B'_R$ gilt

$$(*)\quad \lim_{\rho \to 0} \rho^{-n} \int_{C_\rho^+(\xi)} |v(x) - v^+(\xi)| = 0.$$

Ferner gilt für $g \in C_c^1(C_R)^n$ die

Greensche Formel

$$(**) \quad \int_{C_R^+} v \operatorname{div} g = -\int_{C_R^+} g \cdot Dv - \int_{B'_R} v^+ \cdot g^n$$

<u>Beweis:</u> (i) Existenz

Definiere für eine Funktion

$$f : C_R^+ \to \mathbb{R}$$

$$f^\varepsilon : B'_R \to \mathbb{R}$$

durch

$$f^\varepsilon(\xi) = f(\xi, \varepsilon) .$$

Setze ferner für $0 < \varepsilon < \varepsilon' \leq R$

$$Q_{\varepsilon,\varepsilon'} = B'_R \times (\varepsilon, \varepsilon')$$

und

$$\Gamma_\varepsilon = B_R^1 \times \{\varepsilon\}.$$

Bis auf h.a. viele ε gilt dann wieder

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} |Dv| = 0.$$

Nach Thm. 1.3.8 existiert ferner eine Folge $v_j \in C^\infty(C_R^+)$ mit

$$v_j \to v \quad \text{in } L^1(C_R^+)$$

und

$$\int_{C_R^+} |Dv_j| \to \int_{C_R^+} |Dv|$$

Hieraus lesen wir einmal ab, daß

$$v_j^{\varepsilon} \to v^{\varepsilon} \quad \text{in } L^1(B_R^1)$$

(für eine nicht umbenannte T.F.)
für H_1-fast alle ε und (nach 1.3.11)

$$\int_{Q_{\varepsilon,\varepsilon'}} |Dv_j| \to \int_{Q_{\varepsilon,\varepsilon'}} |Dv|$$

für H_1-fast alle $\varepsilon, \varepsilon'$, wobei $\varepsilon' = R$ zugelassen ist. Sei $N \subset (0,R]$ die Ausnahmemenge mit $H_1(N) = 0$. Für die v_j's gilt nun

$$\int_{B_R^1} |v_j^{\varepsilon} - v_j^{\varepsilon'}| \le \int_{Q_{\varepsilon,\varepsilon'}} |D_n v_j|$$

Für $\varepsilon, \varepsilon' \notin N$ folgt daher

$$\int_{B_R'} |v^{\varepsilon} - v^{\varepsilon'}| \leq \int_{Q_{\varepsilon,\varepsilon'}} |D_n v|$$

Die (v^{ε}) bilden daher eine Cauchyfolge in $L^1(B_R')$. Sei v^+ ihr Limes. Dann gilt insbesondere

$$\int_{B_R'} |v^+ - v^{\varepsilon}| \leq \int_{Q_{0,\varepsilon}} |Dv| \qquad \forall \varepsilon \notin N$$

Diese Überlegungen gelten natürlich auch für beliebige $0 < \rho \leq R$ anstelle von R, so daß

$$(*) \quad \int_{B_\rho'(\xi)} |v^+ - v^{\varepsilon}| \leq \int_{C_\rho^+(\xi)} |Dv|$$

$\forall\, \xi$ und ρ mit $B_\rho'(\xi) \subset B_R$

(ii) Beweis von (*):

Es gilt

$$\int_{C^+_\varrho(\xi)} |v - v^+(\xi)| = \int_{B'_\varrho(\xi)} dy \int_0^\varrho |v^{(y,t)} - v^+(\xi)|\,dt \leq$$

$$\leq \int_{B'_\varrho(\xi)} dy \int_0^\varrho |v(y,t) - v^+(y)| + \varrho \cdot \int_{B'_\varrho(\xi)} |v^+(y) - v^+(\xi)|$$

~~Nach dem Satz von Lebesgue ist nun für H_{n-1}-fast alle ξ~~

$$\cancel{\lim_{\varrho \to 0} \varrho^{1-n} \int_{B'_\varrho(\xi)} |v^+(y) - v^+(\xi)| = 0}$$

Das erste Integral können wir nach (1) abschätzen durch

$$\rho \cdot \int_{C^+_\rho(\xi)} |Dv| \quad ,$$

folglich ist ~~für H_{n-1} fast alle ξ~~

$$\rho^{-n} \cdot \int_{C^+_\rho(\xi)} |v - v^+(\xi)| \leq \rho^{1-n} \cdot \int_{C^+_\rho(\xi)} |Dv| +$$

$$+ \rho^{1-n} \cdot \int_{B'_\rho(\xi)} |v^+ - v^+(\xi)|$$

Lassen wir $\rho \to 0$ gehen, so konvergiert das zweite Integral nach ~~dem~~ einem Satz von Lebesgue für H_{n-1}-f.a. ξ nach 0, und das zweite ebenfalls ~~wegen~~ nach Lemma 1.3.13.

(iii) Es bleibt noch (**) zu beweisen:

Sei $g \in C_c^1(C_R)^n$. Dann ist nach dem Greenschen Satz

$$(2) \int_{Q_{\varepsilon,R}} \varphi \cdot \operatorname{div} g = -\int_{Q_{\varepsilon,R}} g \cdot Dv - \int_{B_R'} v^\varepsilon \cdot g^{n,\varepsilon}$$

für $v \in C^1(C_R^+)$ richtig. Sei jetzt $v \in BV(\Omega)$, so folgt (2) durch Approximation auch für v, falls $\varepsilon \notin N$. Hierbei verwenden N ist die Menge in (i) mit $H_1(N) = 0$.

auch das Ergebnis von 1.3.10 (ii).

Lassen wir dann $\varepsilon \to 0$, so folgt die Behauptung.

<u>1.3.15 Bemerkung</u>

Sei $C_R^- = B_R' \times (-R, 0)$ und $v \in BV(C_R^-)$, so existiert eine Spur $v^- \in L^1(B_R')$, und es gelten die analogen Formeln (*) bzw. (**) von 1.3.14. Insbesondere ist also für $g \in C_c^1(C_R)^n$

$$(**) \int_{C_R^-} v \cdot \operatorname{div} g = -\int_{C_R^-} g \cdot Dv + \int_{B_R'} v^- \cdot g^n$$

1.3.16 Satz

Sei $v_1 \in BV(C_R^+)$ und $v_2 \in BV(C_R^-)$,

so definiert

$$v = \begin{cases} v_1 , & \text{in } C_R^+ \\ v_2 , & \text{in } C_R^- \end{cases}$$

eine Funktion in $BV(C_R)$, und es gilt

$$Dv = (v^+ - v^-) \cdot \nu \cdot dH_{n-1} \quad \text{auf } B_R' , \ \nu = (0, \dots, 0, 1)$$

$$\int_{B_R'} |v^+ - v^-| \, dH_{n-1} = \int_{B_R'} |Dv|$$

Beweis: Sei $g \in C_c^1(C_R)$. Dann schließen wir aus den Formeln $(**)$ in 1.3.14 bzw. 1.3.15, daß

$$\int_{C_R} v \cdot \operatorname{div} g = -\int_{C_R^+} g \cdot Dv - \int_{B_R'} (v^+ - v^-) \cdot g^n \, dH_{n-1}$$

$$- \int_{C_R^-} g \cdot Dv$$

Ist $|g| \leq 1$, so folgt

$$\left| \int_{C_R} v \cdot \operatorname{div} g \right| \leq \int_{C_R^+} |Dv_1| + \int_{C_R^-} |Dv_2| + \int_{B_R'} |v^+ - v^-|$$

$$< \infty .$$

$\Rightarrow v \in BV(C_R)$ und

$$\int_{B_R'} g \cdot Dv = \int_{B_R'} (v^+ - v^-) \cdot g^n \, dH_{n-1}$$

$$\forall \; g \in C_c^1(C_R)$$

$\Longrightarrow$

$$D_i v \big|_{B_R'} = 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq n-1$$

und

$$\boxed{D_n v = (v^+ - v^-)\, dH_{n-1}} \quad \text{auf } B_R'.$$

Insbesondere ist daher

$$|Dv| = |D_n v| = |v^+ - v^-|\, dH_{n-1} \quad \text{auf } B_R'$$

qed.

1.3.17. Bemerkung

Sei $v \in BV(C_R^+)$ und gelte $v|_{\{x^n = R\}} = 0$.

Dann folgt aus einer Formel im Beweis von Lemma 1.3.15

$$\int_{B_R'} |v| \leq \int_{C_R^+} |Dv|$$

Das Ergebnis von 1.3.15 läßt sich auch auf beschränkte offene Menge Ω mit Lipschitzrand übertragen.

~~1.3.18~~

1.3.18 Theorem

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen u. beschränkt, und sei $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Dann existiert für $v \in BV(\Omega)$ eine Spur $v^+ \in L^1(\partial\Omega)$, so daß für H_{n-1}-fast alle $\xi \in \partial\Omega$ gilt

$$\lim_{\rho \to 0} \rho^{-n} \int_{B_\rho(\xi) \cap \Omega} |v - v^+(\xi)|\, dx \to 0\ 0.$$

Ferner gilt für $g \in C^1_c(\mathbb{R}^n)^n$ die Greensche Formel

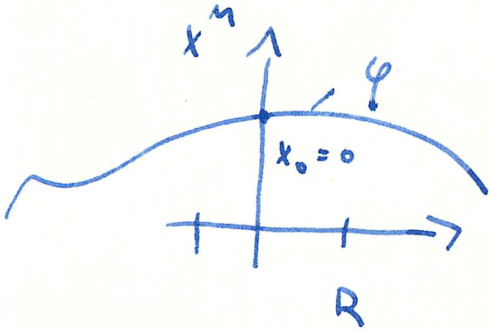
$$-\int_\Omega g \cdot Dv = \int_\Omega \operatorname{div} g \cdot v - \int_{\partial\Omega} v^+ \cdot \nu \cdot dH_{n-1},$$

wobei ν die äußere Normale ist.

Beweis:

Mit Hilfe einer geeigneten Zerlegung der Eins und Einführung einer Translation und Rotation dürfen wir o.B.d.A. lediglich folgenden Fall untersuchen: Sei $x_0 = 0 \in \partial\Omega$. Dann existiert $R > 0$ und $\varphi \in C^{0,1}(\overline{B}'_R)$, so daß Ω sich lokal beschreiben läßt durch

$$\Omega_R = \{(x', x^n) : x' \in B'_R \, , \; 0 < x^n < \varphi(x')\}$$



Sei $v \in BV(\Omega_R)$ und sei $\operatorname{supp} v \subset\subset \partial B'_R \times \mathbb{R}$.

Wir wollen dann zeigen, daß eine Spur v^+ in $L^1(\Gamma)$, $\Gamma = \{(x', \varphi(x')) : x' \in B'_R\}$, existiert.

Definiere die Koordinatentransformation

$$y : \Omega_R \to \mathbb{R}^n_+$$

$$x' \to y'$$

$$x^n \to \varphi(x') - x^n$$

Dann ist

$$\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial \varphi}{\partial x^{n-1}} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{dx}{dy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial x^1} & -\frac{\partial\varphi}{\partial x^2} & & -\frac{\partial\varphi}{\partial x^{n-1}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| = \left|\frac{dx}{dy}\right| = 1$$

Sei

$$\tilde{v}(y) = v(x), \qquad G = y(\Omega_R)$$

Dann ist $\tilde{v} \in BV(G)$. Nach 1.3.15 existiert eine Spur $\tilde{v}^+ \in L^1(\bar{G} \cap \mathbb{R}^{n-1}\times\{0\})$, die den Relationen (*) und (**) in jenem Lemma genügt. Transformieren wir zurück, so folgen die ersten Behauptungen des Theorems für diese spezielle Konfiguration.

Zum Beweis der Greenschen Formel machen wir einen Vorgriff auf 1.3.20: Sei $v_j \in BV(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega |v_j - v| \to 0 ,$$

$$\int_\Omega |Dv_j| \to \int_\Omega |Dv| ,$$

so folgt

$$\int_{\partial\Omega} |v_j - v| \to 0 .$$

Sei daher (v_j) eine in $H^{1,1}(\Omega)$, die die ersten beiden Bedingungen erfüllt, so gilt für $g \in C^1_c(\mathbb{R}^n)^n$

$$-\int_\Omega g \cdot Dv_j = \int_\Omega v_j \operatorname{div} g - \int_{\partial\Omega} v_j \, g \cdot \nu$$

Im Limesfalle folgt die Beh. wegen 1.3.10 (ii).

$$|y-\tilde{z}|^2 = |y''|^2 + |x'-z'|^2$$

$$= |\varphi(x') - x''|^2 + |x'-z'|^2$$

$$|x-z|^2 = |x'' - \varphi(z')|^2 + |z'-x'|^2$$

$$\cancel{\leq |x'' - \varphi(z')|^2} \quad \Rightarrow$$

1) $|x-z| \leq |x-(z',\varphi(x'))| + |(z',\varphi(z')) - (x',\varphi(x'))|$

$$\leq \rho + \sqrt{1+L^2}\cdot|z'-x'| \leq \rho\left(1+\sqrt{1+L^2}\right)$$

2) $\cancel{|y-\tilde{z}| \leq |x-z|} + |(z',\varphi(x')) - (x',\varphi$

$$|y-\tilde{z}| = |x-(z',\varphi(x'))| \leq |x-z| + |\varphi(z') - \varphi(x')|$$

$$|y-\tilde{\xi}| \le (1+L)\cdot|x-\xi|$$

$$|x-\xi| \le \left(1+\sqrt{1+L^2}\right)\cdot|y-\tilde{\xi}|$$

$$\Longrightarrow$$

$$\rho^{-n}\cdot\int_{B_\rho(\xi)\cap\Omega} |v-v(\xi)| \le \rho^{-n}\cdot\int_{B_{(1+L)\rho}(\tilde{\xi})} |\tilde{v}-\tilde{v}(\tilde{\xi})| =$$

$$= (1+L)^{n}\cdot((1+L)\rho)^{-n}\cdot\int_{B_{(1+L)\rho}(\tilde{\xi})} |\tilde{v}-\tilde{v}(\tilde{\xi})|$$

1.3.19 <u>Satz</u>

Seien $\Omega, G \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte offene Mengen mit Lipschitzrändern, und sei $y : \bar{\Omega} \to \bar{G}$ ein C^2-Diffeomorphismus, so gilt für beliebige Funktionen $v \in L^2(\partial\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)^n$

~~(*)~~

(i)
$$\int_{\partial\Omega} v \cdot g^i \cdot \nu_i = \int_{\partial G} \tilde{v} \cdot \tilde{g}^i \cdot \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \cdot \mu_k \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right| \; ;$$

hierbei sind ν bzw μ die äußeren Normalen an $\partial\Omega$ bzw. ∂G.

(ii) Es folgt ferner

$$\frac{\partial}{\partial y^k} \left\{ \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \left| \frac{dx}{dy} \right| \right\} = 0 \qquad \forall\, i$$

(iii) Ist $y : \bar{\Omega} \to \overline{\mathbb{R}}^n_+$ eine Aufbiege-

transformation der Art

$$y^i = x^i \,, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

$$y^n = \varphi(x') - x^n \,, \quad 0 < x^n < \varphi(x')$$

so bleibt (i) auch für $\varphi \in C^{0,1}$ richtig.

Insbesondere ist

$$\int_{\partial\Omega} v = \int_{\{y^n=0\}} \tilde{v} \cdot \sqrt{1+|D\varphi|^2} \qquad \forall\, v \in L^1(\partial\Omega)$$

<u>Beweis</u>:

Wir dürfen o. B. d. A. annehmen, daß

$v, g \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$. Wir wenden die

Greensche Formel an

$$\int_\Omega v \cdot \operatorname{div} g = -\int_\Omega Dv \cdot g + \int_{\partial\Omega} v \cdot g \cdot \nu$$

Transformation liefert

$$(*) \int_\Omega v \operatorname{div} g = \int_G \tilde{v} \cdot \widetilde{\operatorname{div} g} \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right| = \int_G \tilde{v} \cdot \frac{\partial \tilde{g}^i}{\partial y^k} \cdot \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|$$

$$= -\int_G \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y^k} \cdot \tilde{g}^i \cdot \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \left|\frac{dx}{dy}\right| - \int_G \tilde{v} \cdot \tilde{g}^i \cdot \frac{\partial}{\partial y^k} \left\{ \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \left|\frac{dx}{dy}\right| \right\}$$

$$+ \int_{\partial G} v \cdot \tilde{g}^i \cdot \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \cdot \mu_k \left|\frac{dx}{dy}\right|$$

Bem: $v = (0 \,\vdots\, 0)$
$\Rightarrow$
$\frac{\partial}{\partial y^k} \left\{ \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right| \right\} = \operatorname{div} v = 0$

Lassen wir nun die g^i's zu Funktionen mit Träger in $\partial\Omega$ konvergieren, so folgt (i).

(ii) erhält man aus (*), indem man (i) benutzt und

$$\frac{\partial v^i}{\partial y^k} \cdot \frac{\partial y^k}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \widetilde{v}$$

(iii) folgt aus (∗∗), wenn man beachtet,

daß $\left|\frac{dx}{dy}\right| = 1$ und

$$\frac{\partial y^k}{\partial x^i} = \delta^k_i \quad , \qquad 1 \le k \le n-1$$

$$\left(\frac{\partial y^n}{\partial x^i}\right) = (D\varphi, -1)$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial y^k} \cdot \frac{\partial y^k}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 y^k}{\partial x^i \partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial y^k} = \begin{cases} 0, & i = n \\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \dfrac{\partial x^j}{\partial y^n}, & 1 \le i \le n-1 \end{cases}$$

Nun ist $\quad \dfrac{\partial x^j}{\partial y^n} = -\delta^j_n \quad$ und $\quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^n} = 0.$

Also ist

$$\int_{\partial\Omega} v \cdot g \cdot \nu = \int_{\partial G} \tilde{v} \cdot \tilde{g}^i \cdot \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \cdot \mu_k$$

In diesem Fall ist $\mu = (0, -0, -1)$ und

$\left(\frac{\partial y^n}{\partial x}\right) = (D\varphi, -1)$. Setzen wir $g = \nu = -\frac{(D\varphi, -1)}{|(D\varphi, -1)|}$

$\Rightarrow$

$$\int_{\partial\Omega} v = \int_{\partial G} \tilde{v} \cdot \sqrt{1 + |D\varphi|^2}$$ qed.

Bemerkung:

1.3.20 <u>Corollar:</u>

Ist $\partial\Omega \in C^1$, so gilt

$$\lim k \cdot \int_{\Omega_{1/k}} v = \int_{\partial\Omega} v \qquad \forall v \in C^0(\bar\Omega).$$

<u>Beweis:</u>

Es genügt die Beh. für pos. v zu beweisen.

(i) Hebe zunächst v Träger in eine Randumgebung $U = \{(x', x^n) : x' \in B^1_R, \; 0 < x^n < \varphi(x')\}$ mit $\varphi \in C^1$! Definiere die Trf. $y = y(x)$

$$y' = x'$$
$$y^n = \varphi(x') - x^n,$$

$$y : U \longrightarrow \mathbb{R}^n_+$$

und es gilt

$$U \cap \Omega_\varepsilon \xrightarrow{y} \{0 < y^n < \cancel{\ldots}\,(1+L) \cdot \varepsilon\},$$

$L = \sup |D\varphi|$, denn sei $x_0 \in \partial\Omega$ und

$x \in \Omega_\varepsilon$, so ist

$$|y^n| = |y^n - y^n_0| = |\varphi(x') - \varphi(x'_0) - x^n + x^n_0|$$

$$\leq |x^n - x^n_0| + |D\varphi| \cdot |x' - x_0| \leq (1+L) \cdot |x - x_0|$$

Seien G_ε die Randstreifen in G mit

$\{y^n < \varepsilon\} \Longrightarrow$

$$k \cdot \int_{\cap 1/k} \sigma \leq k \cdot \int_{G_{\frac{1+L}{k}}} \tilde{\sigma} = (1+L) \cdot \frac{k}{1+L} \int_{G_{\frac{1+L}{k}}} \tilde{\sigma}$$

$\Longrightarrow$

$$\overline{\lim}\; k \int_{\Omega_{1/k}} \sigma \leq (1+L) \int_{\Gamma} \tilde{\sigma}$$

Andererseits ist

$$G_\varepsilon \xrightarrow{y^{-1}} \Omega_\varepsilon \;,$$

da $|y^n| = |\varphi(x') - x^n| \leq \sqrt{|x' - x'|^2 + |\varphi(x') - x^n|^2} < \varepsilon$

$\Longrightarrow$

$$\inf_{x'_0} \sqrt{|x' - x'_0|^2 + |\varphi(x'_0) - x^n|^2} < \varepsilon$$

$\Longrightarrow$

$$\int_{\Gamma} \tilde{\sigma} \leq \underline{\lim}\; k \cdot \int_{\Omega_{1/k}} \sigma$$

Nun ist

$$\int_{\partial\Omega} \sigma = \int_{\Gamma} \tilde{\sigma} \sqrt{1+|D\varphi|^2}$$

$$\Rightarrow$$

$$\int_{\Gamma} \tilde{\sigma} \le \int_{\partial\Omega} \sigma \le \sqrt{1+L^2} \cdot \int_{\Gamma} \tilde{\sigma}$$

$$\Rightarrow$$

$$\overline{\lim}\, k \cdot \int_{\Omega_{1/k}} \sigma \le (1+L) \cdot \int_{\partial\Omega} \sigma \le (1+L)\sqrt{1+L^2} \cdot$$

$$\cdot \int_{\Gamma} \tilde{\sigma} \le (1+L) \cdot \sqrt{1+L^2} \cdot \underline{\lim}\, k \cdot \int_{\Omega_{1/k}} \sigma$$

~~Mit einer geeigneten Überdeckung der Eins~~
~~gelten diese Ungleichungen~~

Dies gilt für v mit Träger in U. Sei jetzt (V_i) eine endliche offene Überdeckung von $\partial\Omega$, so daß $U_i = \Omega \cap V_i$ eine lokale Umgebung ist, in der die Überlegungen gelten, und sei (φ_i) eine den (V_i) untergeordnete endliche Zerlegung der Eins. Sei L eine obere Schranke für die Lipschitzkonstante der Randdarstellungen $\Longrightarrow$

$$\overline{\lim}\; k \cdot \int_{\Omega_{1/k}} v \le \sum_i \overline{\lim}\; k \cdot \int_{\Omega_{1/k}} v \cdot \varphi_i \le$$

$$\le (1+L) \cdot \int_{\partial\Omega} v \quad , \quad L \to 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\overline{\lim}\; k \cdot \int_{\Omega_{\frac{1}{k}}} v \le \int_{\partial\Omega} v$$

Andererseits ist

$$\int_{\partial\Omega} v\cdot T_i \le \sqrt{1+L^2}\cdot \underline{\lim}\; k\cdot \int_{\Omega_{1/k}} v\cdot T_i$$

$\Rightarrow$

$$\underline{\lim}\; k\cdot \int_{\Omega_{1/k}} \sum_i v\cdot T_i \ge \sum_i \underline{\lim}\; k\cdot \int_{\Omega_{1/k}} v\cdot T_i$$

$$\ge \frac{1}{\sqrt{1+L^2}} \int_{\partial\Omega} v$$

$L \to 0$ liefert nun die Behauptung.

Berichtigung zum Beweis von 1.3.21

(i) Wir beweisen die Abschätzung mit $2(1+L^2)$ bei $\Omega_R = \{(x', x^n) : x' \in B'_R,\ 0 < x^n < \varphi(x')\}$

Setze

$$y' = x'$$

$$y^n = \varphi(x') - x^n$$

Dann ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ D\varphi & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ +D\varphi & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial x^i}{\partial y^n} = -\delta^i_n \quad , \quad \frac{\partial x^n}{\partial y} = (D\varphi, -1)$$

Es ist

$$\int_{\partial\Omega} v = \int_{\mathbb{R}^{n-1}\cap\partial G} \tilde{v}\cdot\sqrt{1+|D\varphi|^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{1+L^2}\cdot\int_{\mathbb{R}^{n-1}\cap\partial G} \tilde{v} \leq \sqrt{1+L^2}\int_G |D\tilde{v}|$$

Nun ist für $1\leq i\leq n-1$

$$\frac{\partial}{\partial y^i}\tilde{v} = \frac{\partial v}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial y^i} = \frac{\partial v}{\partial x^i} + \frac{\partial v}{\partial x^n}\cdot D_i\varphi$$

$$\frac{\partial}{\partial y^n}\tilde{v} = -\frac{\partial v}{\partial x^n}$$

$\Rightarrow$

$$|D\tilde{v}|^2 = |D_\sigma v|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial x^n}\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial x^n}\right|^2\cdot|D_\sigma\varphi|^2$$

$$\underbrace{+2\cdot\frac{\partial v}{\partial x^n}\cdot\frac{\partial v}{\partial x^i}\cdot D_i\varphi}_{\leq |D_\sigma v|^2\cdot|D_\sigma\varphi|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial x^n}\right|^2}$$

$$|D\tilde{v}| \leq 2 \cdot \sqrt{1+L^2} \cdot |Dv|$$

(ii) Ist $v \in H^{1,1}(\Omega)$, so folgt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1} \cap \partial G} \tilde{v} \leq \int\limits_G |D_n \tilde{v}| = \int\limits_G |Dv|$$

1.3.21 Lemma

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen u. beschränkt mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$ und sei L eine obere Schranke für die Lipschitzkonstanten der lokalen Randdarstellungen. Dann existiert eine Konstante $c > 0$, so daß für alle $v \in BV(\Omega)$ gilt

$$\int_{\partial\Omega} |v| \, dH_{n-1} \le \sqrt{1+L^2} \cdot \int_{\Omega} |Dv| + c \cdot \int_{\Omega} |v|.$$

Bew. ist falsch

<u>Beweis:</u> 1) Wir beweisen die Abschätzung zunächst mit $2 \cdot \sqrt{1+L^2}$ anstelle von $\sqrt{1+L^2}$.

(i) Betrachten wir zunächst wieder den Fall wie im Beweis von 1.1.17. Dann ist

$$\cancel{\int_{\Gamma} |v| \, dH_{n-1} = \int_{B'_R} |v| \cdot \sqrt{1+|D\psi|^2} \, dx \le}$$

$$(*) \int_{\Gamma} |v| \, dH_{n-1} = \int_{\tilde G \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}} |\tilde v| \underset{1.3.16}{\leq} \int_{G} |D_y \tilde v|$$

Nun ist

$$\frac{\partial \tilde v}{\partial y^i} = \frac{\partial v}{\partial x^i} \quad , \quad 1 \leq i \leq n-1$$

$$\frac{\partial \tilde v}{\partial y^n} = \frac{\partial v}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial y^n}$$

und

$$\frac{\partial x^k}{\partial y^n} = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x^1}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x^2}, \ldots, -\frac{\partial \varphi}{\partial x^{n-1}}, 1\right)$$

$\Longrightarrow$

$$(\cdot) \quad |D_y \tilde v| \leq 2 \cdot \sqrt{1 + L^2} \cdot |D_x v| \qquad \Longrightarrow$$

$$\int_{\Gamma} |v| \, dH_{n-1} \leq 2 \cdot \sqrt{1 + L^2} \int_{\Omega_R} |Dv|$$

(ii) Den allgemeinen Fall führen wir durch eine Zerlegung der Eins hierauf zurück: Seien (U_i), $1 \le i \le N$, ~~endlich viele~~ eine offene Überdeckung von $\partial\Omega$, sodaß $\partial\Omega \cap U_i$ sich als Lipschitzgraph darstellen läßt, und sei φ_i, $1 \le i \le N$, eine untergeordnete endliche Zerlegung der Eins, d.h. gelte

$$0 \le \varphi_i \le 1, \quad \varphi_i \in C_c^\infty(U_i)$$

und

$$\sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x) = 1 \qquad \forall x \in \partial\Omega .$$

Setze $v_i = v \cdot \varphi_i \implies$

$$\int_{\partial\Omega} |v| = \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial\Omega} |v_i| \le 2 \cdot \sqrt{1+L^2} \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |Dv_i| \le$$

$$\leq 2 \cdot \sqrt{1+L^2} \cdot \int_\Omega |Dv| + 2 \cdot \sqrt{1+L^2} \cdot \int_\Omega |v| \sum_{i=1}^{N} |D\varphi_i|$$

$$\leq 2 \cdot \sqrt{1+L^2} \int_\Omega |Dv| + c \cdot \int_\Omega |v|.$$

2.) Die scharfe Abschätzung ist sicherlich für $v \in$ ~~$C^1(\bar\Omega)$~~ $H^{1,1}(\Omega)$ richtig, denn für solche v gilt in $(*)$ die ~~sch~~ genauere Ungleichung

$$\int_\Gamma |v| \, dH_{n-1} = \sqrt{1+L^2} \int_{\bar G \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}} |\tilde v| \leq \sqrt{1+L^2} \int_G |D_n \tilde v|$$

und

$$\cancel{|D_n \tilde v| \leq \sqrt{1+L^2} \int_\Omega |Dv|.}$$

$$|D_n \tilde v| = |D_n v|$$

Die Behauptung des Lemmas folgt nun durch Approximation mit Hilfe von

1.3. ~~19~~22 Satz

Sei $\partial\Omega \in C^{0,1}$ und $v, v_j \in BV(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega |v_j - v| \to 0$$

und

$$\int_\Omega |Dv_j| \to \int_\Omega |Dv| ,$$

dann folgt

$$\int_{\partial\Omega} |v_j - v| \, dH_{n-1} \to 0.$$

Beweis:

(i) Wir wollen, daß $\forall v \in BV(\Omega)$

$$\int_{\partial\Omega} |v| \leq c_1 \cdot \int_{\Omega} |Dv| + c_2 \cdot \int_{\Omega} |v|$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : d(x) < \varepsilon\}$. Dann

folgt hieraus

$$\int_{\partial\Omega} |v| \leq c_1 \cdot \int_{\Omega_\varepsilon} |Dv| + c_\varepsilon \cdot \int_{\Omega_\varepsilon} |v| ,$$

betrachte nun anstelle von v, $v \cdot \varphi$, mit

$0 \leq \varphi \leq 1$, ~~$\varphi \in C_c^\infty$~~ $\varphi \in C_c^\infty$, $\varphi|_{\partial\Omega} = 1$, $\varphi|_{\Gamma_\varepsilon} = 0$,

$\Gamma_\varepsilon = \{x : d(x) = \varepsilon\}$

(ii) Für f.a. ε gilt ferner

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} |Dv| = 0$$

und

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |Dv_j| \to \int_{\Omega_\varepsilon} |Dv|$$

$\Longrightarrow$

$$\int_{\partial\Omega} |v - v_j| \leq c_1 \cdot \int_{\Omega_\varepsilon} |D(v - v_j)| + c_\varepsilon \cdot \int_{\Omega_\varepsilon} |v - v_j|$$

$\Longrightarrow$

$$\overline{\lim_j} \int_{\partial\Omega} |v - v_j| \leq c_1 \overline{\lim_j} \int_{\Omega_\varepsilon} \{ |Dv| + |Dv_j| \} =$$

$$= c_1 \cdot 2 \cdot \int_{\Omega_\varepsilon} |Dv| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

Beweis ~~von~~ der Randabschätzung

Wir wissen, daß $\exists\ v_\varepsilon \in C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$,

so daß

$$\|v - v_\varepsilon\|_{L^1} \to 0$$

und

$$\int_\Omega |Dv_\varepsilon| \to \int_\Omega |Dv|$$

~~Diese~~

Für diese v_ε gilt sicher die scharfe Abschätzung

$$\int_{\partial\Omega} |v_\varepsilon| \leq \sqrt{1+L^2} \cdot \int_\Omega |Dv_\varepsilon| + c \cdot \int_\Omega |v|$$

1.3.21. Corollar zu 1.3.19

Ist $\partial\Omega \in C^1$, so gibt ~~es zu jedem~~

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \ \bigvee_{c_\varepsilon} \ \cancel{\bigwedge_{v\in BV(\Omega)}} \ \int_{\partial\Omega} |v| \le (1+\varepsilon)\int_{\Omega} |Dv| + c_\varepsilon \int_{\Omega} |v|.$$

1.3.22. Satz

~~Ist $\partial\Omega \in C^2$ und kompakt~~, so gilt $\forall\, v \in BV(\Omega)$
Erfüllt Ω eine innere Kugelbedingung und ist $\partial\Omega \in C^{0,1}$

$$\int_{\partial\Omega} |v| \le \int_{\Omega} |Dv| + c\cdot \int_{\Omega} |v|$$

Diese Abschätzung gilt also insbesondere für $\partial\Omega \in C^2$.

Beweis für $\partial\Omega \in C^2$

1.3.2 ~~4~~ Satz (Fortsetzungssatz)

~~Sei~~ $\partial\Omega \in C^{0,1}$ und sei $\Omega \subset\subset G$. So existiert zu jedem $v \in BV(\Omega)$ eine Fortsetzung $\tilde{v} \in BV_c(G)$, so daß

$$\int_G |D\tilde{v}| + \int_G |\tilde{v}| \le c \cdot \left\{ \int_\Omega |Dv| + \int_\Omega |v| \right\}$$

und

$$\int_{\partial\Omega} |D\tilde{v}| = 0 .$$

<u>Beachte</u>: Der Fortsetzungsoperator ist zwar beschränkt, aber nicht linear.

<u>Beweis</u>:

Sei $\Omega \subset\subset \Omega' \subset\subset G$, $\partial\Omega' \in C^{0,1}$. Wir verwenden den Spursatz von Gagliardo (vgl. Besov et al. Integral representations of functions and imbedding theorems, p. 80 f), daß, wenn $\partial\Omega \in C^{0,1}$ und $v^+ \in L^1(\partial\Omega)$ vorgegeben ist, eine Funktion $v \in H^{1,1}(\Omega)$ existiert, so daß

$$\|v\|_{1,1} \leq c \cdot \|v^+\|_{0,1}$$

Diese Beziehung ist jedoch nicht linear!

Sei daher $v \in BV(\Omega)$. Dann existiert eine Spur $v^+ \in L^1(\partial\Omega)$ und eine Funktion $w \in H^{1,1}(\Omega' \setminus \bar{\Omega})$ mit

$$w = \begin{cases} v^+ & , \text{ auf } \partial\Omega \\ 0 & , \text{ auf } \partial\Omega' \end{cases}$$

und

$$\|w\|_{1,1} \leq c \cdot \|v^+\|_{0,1}$$

Setze w außerhalb Ω' identisch 0 fort,

und definiere

$$\tilde{v} = \begin{cases} v, & \text{in } \Omega \\ w, & \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \Omega . \end{cases}$$

Dann ist

$$\int_G |D\tilde{v}| + \int_G |\tilde{v}| = \int_\Omega |Dv| + \int_\Omega |v|$$

$$+ \underbrace{\int_{\partial\Omega} |D\tilde{v}|}_{=0} + \int_{\Omega' \setminus \bar{\Omega}} |Dw| + \int_{\Omega' \setminus \bar{\Omega}} |w| \leq$$

$$\leq \int_\Omega |Dv| + \int_\Omega |v| + c \cdot \int_{\partial\Omega} |v^+| \leq \tilde{c} \cdot \left\{ \int_\Omega |Dv| + \int_\Omega |v| \right\}$$

qed.

1.3.24. Theorem (Einbettungssatz)

Sei $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Dann ~~ist~~ läßt sich $BV(\Omega)$ stetig in $L^{n/n-1}(\Omega)$ einbetten. Die Einbettung in $L^p(\Omega)$, $1 \le p < \frac{n}{n-1}$, ist kompakt.

Beweis:

(i)

$$\left(\int_\Omega |v|^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \le c \cdot \left\{ \int_\Omega |Dv| + \int_\Omega |v| \right\}$$

Nach 1.3.23 dürfen wir annehmen, daß

$BV(\Omega) \hookrightarrow BV_c(G)$ mit $\Omega \subset\subset G$,

und daß $\int_{\partial\Omega} |Dv| = 0$.

Sei v_ε eine Mollifizierung von v. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Dv_\varepsilon| \to \int_{\mathbb{R}^n} |Dv|$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Dv| = \sup\Big\{ \int_{\mathbb{R}^n} v\, D_i \varphi^i : \ |(\varphi^1, \dots, \varphi^n)| \le 1, \ \varphi_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$\Longrightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Dv_\varepsilon| = \sup\Big\{ \int_{\mathbb{R}^n} v_\varepsilon\, D_i \varphi_i : \ \dots \Big\}$$

$$= \sup\Big\{ \int_{\mathbb{R}^n} v\, D_i \varphi_{i,\varepsilon} \Big\} \le \int_{\mathbb{R}^n} |Dv|$$

$\Longrightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Dv_\varepsilon| = \int_{\mathbb{R}^n} |Dv|$$

und wegen $\int_{\partial\Omega} |Dv| = 0$ auch

$$\int_{\Omega} |Dv_\varepsilon| \to \int_{\Omega} |Dv|$$

Wenden wir nun den Sobolevschen Einbettungssatz auf v_ε an:

$$\left(\int_{\Omega} |v_\varepsilon|^{\frac{n}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq c \cdot \left\{ \int_{\Omega} |Dv_\varepsilon| + \int_{\Omega} |v_\varepsilon| \right\}$$

und gehen zum Limes über, so folgt die Beh.

(ii) Sei $v_j \in BV(\Omega)$ eine glm. beschränkte Folge. Betrachte Mollifizierungen $v_{j,\varepsilon}$ und wähle $\varepsilon_j \to 0$ so, daß

$$\int_{\Omega} |v_{j,\varepsilon_j} - v_j|^p \leq \frac{1}{j}$$

und

$$\int_\Omega |Dv_{j,\varepsilon_j}| \le \int_\Omega |Dv_j| + 1$$

Eine ~~Rel~~ Teilfolge der (v_{j,ε_j}), die wir nicht anders indizieren, ist dann eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega)$, und daher auch (v_j). qed.

1.3.25. Theorem

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen u. beschränkt mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Ω erfülle außerdem eine innere Kugelbedingung. Definiere für $v \in BV(\Omega)$

$$\int_\Omega \sqrt{1+|Dv|^2} = \sup\Big\{ \int_\Omega (\varphi_0 + v \cdot D_i \varphi^i) : \varphi^0, \varphi^i \in \mathcal{D}(\Omega),\ |(\varphi^0, \dots, \varphi^n)| \le 1 \Big\}.$$

Sei $\kappa > 0$ und $\beta \in L^\infty(\partial\Omega)$ mit $|\beta| \le 1-a$, $a > 0$.

Dann besitzt das Variationsproblem

$$J(v) := \int_\Omega \sqrt{1+|Dv|^2} + \frac{\kappa}{2}\int_\Omega |v|^2 + \int_{\partial\Omega} \beta \cdot v$$

$$\longrightarrow \min \quad \forall v \in BV(\Omega)$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in BV(\Omega)$.

<u>Beweis</u>: (i) Die Eindeutigkeit ist klar, da J strikt konvex.
(ii) Sei (v_ε) eine Minimalfolge. Dann ist

$$J(v_\varepsilon) \geq \int_\Omega |Dv_\varepsilon| + \frac{\kappa}{2}\int_\Omega |v_\varepsilon|^2 - (1-a)\cdot\int_\Omega |Dv_\varepsilon|$$

$$- c \cdot \int_\Omega |v_\varepsilon|$$

$\Longrightarrow$

$$\int_\Omega |Dv_\varepsilon| + \int_\Omega |v_\varepsilon|^2 \leq \text{const.}$$

Eine Teilfolge konvergiert daher in $L^1(\Omega)$ nach eine Funktion $u \in BV(\Omega)$. Die Beh.

folgt nun aus

<u>1.3.26 Satz.</u>

Sei $\partial\Omega \in C^{0,1}$ und genüge Ω einer IKB.

Sei $j(x,t)$, $(x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$, eine in x

meßbare und in t Lipschitz stetige Funktion

mit

$$j(x,0) \in L^1(\partial\Omega)$$

und $\quad |j(x,t_1) - j(x,t_2)| \le |t_1 - t_2|$.

$\varphi \in L^1(\partial\Omega)$ und

Sei J das Funktional

$$J(v) = \int_\Omega \sqrt{1+|Dv|^2} + \frac{\kappa}{2}\int_\Omega |v|^2 + \int_{\partial\Omega} j(x, v - \varphi),$$

sei (v_k) eine Folge in $BV(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega |Dv_k| + \int_\Omega |v_k| \leq \text{const}$$

und

$$v_k \to u \quad \text{in } L^1(\Omega).$$

Dann gilt

$$J(u) \leq \underline{\lim}\, J(v_k).$$

<u>Beweis:</u>

Es ist sicher $u \in BV(\Omega)$.

Angenommen, die Behauptung wäre falsch, dann gäbe es $\gamma > 0$, sodaβ für eine Teilfolge, die wir allerdings gleich benennen, gälte

$$J(v_k) \leq J(u) - \Gamma .$$

Sei $\varepsilon > 0$, und sei Ω_ε der Randstreifen der Breite ε. Dann ist

$$\int_\Omega \sqrt{1+|Dv_k|^2} + \frac{\kappa}{2}\int_\Omega |v_k|^2 \leq \int_\Omega \sqrt{1+|Du|^2}$$

$$+ \kappa \cdot \int_\Omega |u|^2 + \int_{\partial\Omega} |j(x, u-\varphi) - j(x, v_k - \varphi)| - \Gamma \leq$$

$$\leq \int_\Omega \sqrt{1+|Du|^2} + \frac{\kappa}{2} \cdot \int_\Omega |u|^2 + \int_{\partial\Omega} |u - v_k| - \gamma$$

$$\leq \int_\Omega \sqrt{1+|Du|^2} + \frac{\kappa}{2} \cdot \int_\Omega |u|^2 + \int_{\Omega_\varepsilon} |Du| + \int_{\Omega_\varepsilon} |Dv_k|$$

$$+ c_\varepsilon \cdot \int_\Omega |u - v_k| - \gamma$$

$$\Rightarrow$$

$$\int_{\Omega \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon} \sqrt{1+|Dv_k|^2} + \frac{\kappa}{2} \int_\Omega |v_k|^2 \le$$

$$\le \int_\Omega \sqrt{1+|Du|^2} + \frac{\kappa}{2} \int_\Omega |u|^2 + \int_{\Omega_\varepsilon} |Du| + c_\varepsilon \cdot \int_\Omega |u - v_k| - \gamma$$

$$\underset{k \to \infty}{\Longrightarrow}$$

$$\int_{\Omega \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon} \sqrt{1+|Du|^2} + \frac{\kappa}{2} \cdot \int_\Omega |u|^2 \le \int_\Omega \sqrt{1+|Du|^2} + \frac{\kappa}{2} \int_\Omega |u|^2$$

$$+ \int_{\Omega_\varepsilon} |Du| - \gamma .$$

$\varepsilon \to 0$ liefert nun die Behauptung.

$$d\mu = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\, dx$$

$$f * g = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, g(x-y)\, d\mu$$