Übungen zu Analyis II

Blatt 9

1 Sei $I = [a,b]$, E ein Banachraum und $f \in C^0(I,E)$. Für $p \in [1,\infty)$ definiere die sog. *L^p-Norm*

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b \|f\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

In der nächsten Aufgabe wird zu beweisen sein, daß hierdurch tatsächlich eine Norm definiert wird.

Diese Definition ist natürlich für alle Riemann integrablen Funktionen möglich, doch ist $\|\cdot\|_p$ auf $R(I,E)$ keine Norm, da die positive Definitheit verletzt ist.

Seien $p, p' \in [1,\infty)$ konjugierte Exponenten, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, und $E = \mathbb{K}$, dann beweise man die sog. *Höldersche Ungleichung*

$$\left| \int_a^b fg \right| \le \|f\|_p \, \|g\|_{p'}.$$

Hinweis: Vergleiche Aufgabe 1 von Exercises 1.4.16 on page 70.

2 Sei E ein Banachraum, so ist die L^p-Norm ist eine Norm auf $C^0(I,E)$.

3 Sei $f \in C^0(I,E)$, so gilt

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty = \sup_I \|f\|.$$

4 Man beweise (5.5.14) für den Fall $\varphi' < 0$.

5 Man zeige

(i) Sei $f \in C^1(I,\mathbb{K})$, so gilt

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x = 0.$$

(ii) Diese Beziehung gilt auch für Funktionen, die stückweise von der Klasse C^1 sind.

6 Man berechne die folgenden unbestimmten Integrale

$$\text{(i)} \int \sqrt{4x+5} \quad \text{(ii)} \quad \int \cos(2x+1) \quad \text{(iii)} \int \frac{1}{\sqrt{5x+1}}$$

$$\text{(iv)} \int x^2 \sin x \quad \text{(v)} \quad \int x e^{-x^2} \quad \text{(vi)} \int \tan^2 5x$$

7 Man beweise Remark 5.7.2.

8 Man verifiziere Lemma 5.7.4.