Übungen zu Analyis II

Blatt 7

1 Man zeige, daß die Funktion $f(x) = |x|^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, auf $I = [-1, 1]$ Hölder-stetig ist mit Exponent α.

2 Sei $I = [a, b]$ und $f_n \in C^0(I)$ eine Folge von Funktionen, die im offenen Intervall differenzierbar sind und deren Ableitung gleichmäßig beschränkt ist, d.h. es existiert eine positive Konstante c, so daß

$$|f_n'(x)| \leq c \qquad \forall\, x \in (a, b),\ \forall\, n.$$

Nehme weiter an, daß $f_n(a) = 0\ \forall\ n$, dann besitzt die Folge eine auf I gleichmäßig konvergente Teilfolge.

3 Man zeige, daß die Vereinigung von endlich vielen gleichgradig stetigen Mengen wieder gleichgradig stetig ist.

4 Man beweise Proposition 4.2.2.

5 Seien E, F normierte Räume. Eine Abbildung $A \in L(E, F)$ heißt *kompakt*, falls A beschränkte Mengen in relativ kompakte abbildet. Sei I=[a,b]; man zeige, daß sich $C^n(I)$ auf natürliche Weise in $C^m(I)$ einbetten läßt, falls $0 \leq m < n$, und daß diese Einbettung kompakt ist, wenn wir die Räume mit den in Aufgabe 9 von Aufgaben 3.1.20 definierten Normen versehen.

6 Sei E ein separabler normierter Raum über $\mathbb{K}$ und $\varphi_n \in E^*$ eine Folge von stetigen linearen Funktionalen, deren Normen gleichmäßig beschränkt sind, d.h. es existiert eine Konstante c, so daß

$$\|\varphi_n\| \leq c \qquad \forall\, n.$$

Dann kann man eine Teilfolge auswählen, die punktweise nach einem stetigen linearen Funktional $\varphi \in E^*$ konvergiert.