Übungen zu Analyis II

Blatt 6

1 Man zeige mittels der Lagrangeschen Restgliedabschätzung, daß die Eulersche Zahl e irrational ist.

2 Man beweise, daß die Funktion in (3.8.24) von der Klasse C^∞ ist und daß alle Ableitungen im Ursprung verschwinden.

3 Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\Omega \subset E$ eine konvexe Menge. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, falls

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \qquad \forall\, x, y \in \Omega,\ \forall\, t \in [0,1].$$

f heißt *konkav*, falls

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y) \qquad \forall\, x, y \in \Omega,\ \forall\, t \in [0,1].$$

Offensichtlich ist f genau dann konvex, wenn $-f$ konkav ist.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Man zeige, daß $f \in C^2(I)$ genau dann konvex ist, wenn $f'' \geq 0$.

4 Man zeige, daß der reelle Logarithmus eine konkave Funktion ist und beweise mit seiner Hilfe die sog. *Youngsche Ungleichung*

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{p'}y^{p'} \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^+,$$

hierbei sind p, p' sog. *konjugierte Exponenten*, d.h.

$$p, p' \in (1, \infty) \quad \text{und} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$