Übungen zu Analyis II

Blatt 5

1 Man beweise Proposition 3.7.7.

2 Man zerlege die rationalen Funktionen $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ und $g(z) = \frac{3z+4}{(z-1)(z-3)}$ in Teilbrüche.

3 Sei $f \in P(\mathbb{C})$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, dann gilt für jede Nullstelle z, daß auch $\bar{z}$ eine Nullstelle von f ist.

4 Sei $f \in P(\mathbb{R})$ ein Polynom mit $\operatorname{Grad} f$ ungerade. Man gebe zwei Beweise für die Behauptung an, daß f eine reelle Nullstelle besitze.

5 Man zeige, daß sich die Funktion $\log(1+z)$ in dem abgeschlossenen Halbkreis $K = \{\, z \in \bar{B}_1(0) \colon \operatorname{Re} z \geq 0 \,\}$ in eine Potenzreihe um 0 entwickeln läßt

$$\log(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k \qquad \forall\, z \in K,$$

und daß insbesondere $\log 2$ dem Wert der alternierenden harmonischen Reihe $((-\frac{(-1)^n}{n}))_{n\geq 1}$ entspricht.

6 Man entwickle die folgenden reellen Funktionen in Potenzreihen um den Ursprung

$$\log(1+x), \quad \log\frac{1}{1-x}.$$

Für welche reellen x konvergieren die Reihen? Wie läßt sich $\log x$ für beliebige $x > 0$ berechnen?

7 Für die hyperbolischen Funktionen gilt die Potenzreihenentwicklung

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$