Übungen zu Analyis II

Blatt 4

1 Sei $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$ eine Lösung der Gleichung $\dot{x} = Ax$, $A \in L(E)$, so folgt $x \equiv 0$, falls $x(t_0) = 0$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$.

2 Man beweise die Formeln (3.5.24) und (3.5.25).

3 Sei $\Omega \subset \mathbb{K}$ offen, E ein Banachraum und $A \in C^0(\Omega, L(E))$. Nehme an, $A(x_0)$ sei stetig invertierbar, dann existiert eine Umgebung U von x_0, so daß $A(x)$ stetig invertierbar ist für alle $x \in U$. Die Abbildung $B(x) = A(x)^{-1}$ ist dann stetig in U. Sei darüber hinaus A in x_0 differenzierbar, so ist auch B in x_0 differenzierbar und es gilt

$$B'(x_0) = -A(x_0)^{-1} A'(x_0) A(x_0)^{-1}.$$

4 Man weise nach, daß Proposition 3.6.10 auch für komplexe Argumente richtig ist.

5 Man beweise die *Formel von de Moivre*

$$(\cos z + i \sin z)^n = \cos nz + i \sin nz \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

6 Man beweise Proposition 3.6.25.

7 Man beweise Proposition 3.6.28.

8 Sei $n \in \mathbb{N}^*$ und $\frac{x}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$, so gilt

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}$$