Übungen zu Analyis II

Blatt 2

1 Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ injektiv und stetig, so ist f monoton.

2 Beweisen Sie, daß unter den Voraussetzungen von Theorem 3.2.13 f strikt monoton ist und daher f' ein Vorzeichen besitzt.

3 Bestimmen sie die Ableitung von $f(x) = a^x$, $a > 0$, und von der Inversen von f.

4 Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

überall differenzierbar ist, daß aber f' im Ursprung unstetig ist.

5 Man beweise, ohne die Exponentialfunktion zu benutzen, daß die Funktion $f(x) = x^p$, $x \in \mathbb{R}_+^*$, $p \in \mathbb{Q}$, differenzierbar ist und $f'(x) = px^{p-1}$.

6 Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{K}$ und $j : H \to H^*$ die in (3.2.15) beschriebene Identifikation von einem Vektor $v \in H$ mit einem Element $\varphi = j(v) \in H^*$. Man zeige, daß j eine injektive, semilineare[1] und normtreue Abbildung ist, d.h. $\|j(v)\| = \|v\| \; \forall \; v \in H$.

[1]Seien E, F Vektorräume über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $j : E \to F$ heißt *semilinear*, falls $j(\lambda x + \mu y) = \bar{\lambda} j(x) + \bar{\mu} j(y) \; \forall \; x, y \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.