Übungen zu Analyis II

Blatt 11

1 Sei $I = [a,b]$, E ein Banachraum, dann läßt sich jede Riemann integrable Funktion $f \in R(I,E)$ in einer beliebigen L^p-Norm, $1 \le p < \infty$, durch Treppenfunktionen approximieren, vgl. Definition 5.3.3 on page 234, und jede Treppenfunktion wiederum durch stetige Funktionen, d.h. $C^0(I,E)$ liegt bez. einer jeden endlichen L^p-Norm dicht in $R(I,E)$.

2 Sei $0 \le \eta \in C_c^\infty((-1,1))$ und $\int_{-1}^1 \eta = 1$. Setze $\eta_\epsilon(t) = \epsilon^{-1}\eta(\frac{t}{\epsilon})$ mit $\epsilon > 0$, dann gilt

$$0 \le \eta_\epsilon \in C_c^\infty((-\epsilon,\epsilon)) \qquad \text{und} \qquad \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \eta_e = 1.$$

Wir nennen η_ϵ eine *Diracfolge*, da aus der Behauptung in der Teilaufgabe (ii) folgt, daß $\eta_\epsilon(x_0 - \cdot)$ im *Distributionssinne* nach dem *Diracmaß* δ_{x_0} konvergiert; eine eingehendere Erklärung können wir allerdings erst in Band II geben.[1]

Sei nun E ein Banachraum und $I = [a,b]$ ein Intervall. Definiere dann für $f \in R(I,E)$

$$f_\epsilon(x) = \int_a^b \eta_\epsilon(x-t)f(t)\,dt,$$

so gilt

(i) $f_\epsilon \in C^\infty(I,E)$.

(ii) f stetig in $x_0 \implies \lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(x_0) = f(x_0)$.

(iii) Sei $J \Subset (a,b)$ ein offenes Intervall und $f \in C^k(I,E)$, $k \ge 0$, so konvergiert f_ϵ in $C^k(\bar{J},E)$ nach f.

(iv) Für alle $f \in R(I,E)$, $J \Subset (a,b)$ und $1 \le p < \infty$ gilt

$$\lim_{\epsilon\to 0} \|f - f_\epsilon\|_{p,\bar{J}} = 0.$$

(v) $C_c^\infty(\overset{\circ}{I},E)$ liegt bezüglich jeder L^p-Norm, $1 \le p < \infty$, dicht in $R(I,E)$.

(vi) Sei $f \in C^0(I)$ und gelte

$$\int_a^b f\eta = 0 \qquad \forall\, \eta \in C_c^\infty(\overset{\circ}{I}),$$

so ist $f \equiv 0$.

(vii) Man zeige, daß eine Funktion η mit den verlangten Eigenschaften existiert. *Hinweis*: Beachte Note 4.4.17 on page 220.

Man nennt f_ϵ eine *Mollifizierung* (Glättung) von f—wegen (i); η heißt *Mollifizierungskern* oder auch *Friedrichsscher Mollifier.*

---

[1] Das Diracmaß δ_{x_0} läßt sich als lineares stetiges Funktional auf $C^0(I,E)$ definieren durch die Festsetzung $\langle \delta_{x_0}, f\rangle = f(x_0)$.