# Übungen zu Analysis I

Blatt 9

**1** Man zeige, daß die Reihe $((x^n e^{-n|x|}))$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert.

**2** Sei $E \neq \emptyset$, $F$ ein Banachraum und $f_n, g_n : E \to F$ gleichmäßig konvergente Folgen mit Limites $f$ bzw. $g$, dann konvergiert die Folge $f_n + g_n$ gleichmäßig nach $f + g$.

Ist $F$ ein Hilbertraum und sind die Grenzfunktionen $f, g$ gleichmäßig beschränkt auf $E$, d.h. ist $\sup_{x \in E} \|f(x)\| < \infty$, entsprechend für $g$, dann folgt

$$\langle f_n, g_n \rangle \rightrightarrows \langle f, g \rangle.$$

**3** Sei $f_n : E \to \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent mit Limes $f$ und existiert eine Konstante $c > 0$, so daß

$$|f_n(x)| \geq c \qquad \forall\, x \in E,\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

dann konvergiert $f_n^{-1}$ gleichmäßig nach $f^{-1}$.

**4** Sei $0 < \epsilon_n$ eine Nullfolge. Man beweise, daß die Funktionenfolge $f_n(x) = \sqrt{\epsilon_n^2 + |x|^2}$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ nach $f(x) = |x|$ konvergiert.

**5** Man beweise, daß die Reihe $((x^n(1-x)))$ auf $(-1, 1]$ zwar punktweise konvergiert, aber nicht gleichmäßig.