Übungen zu Analysis I

Blatt 8

1 Sei (E, d) ein metrischer Raum und $x_n \to x$, $y_n \to y$ konvergente Folgen in E, dann gilt

$$d(x_n, y_n) \to d(x, y).$$

2 Für die Exponentialfunktion $\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ gilt:

(i) $x_k \to x \quad \Longrightarrow \quad \exp x_k \to \exp x$

(ii) $\exp x$ ist monoton wachsend und bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+^*$ ab. Definiere $\log x$ als die Inverse.

(iii) Es gilt $\quad (\exp x)^y = \exp xy \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{Q}$.

(iv) Setze $e = \exp 1$, so folgt $\quad e^x = \exp x \quad \forall\ x \in \mathbb{Q}$. Diese Gleichung verwenden wir auch als Definition, um e^x für irrationale x zu definieren.

(v) Für $a > 0$ gilt $\quad a^x = e^{x \log a} \quad \forall\, x \in \mathbb{Q}$. Diese Gleichung verwenden wir auch als Definition, um a^x für irrationale x zu definieren.

(vi) Bestimmen Sie die Inverse φ von a^x, falls $0 < a \neq 1$, und zeigen Sie, daß

(1) $\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

(2) $\varphi(b^x) = x\varphi(b) \qquad \forall\, b > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

(3) $x_k \to x_0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x_k) \to \varphi(x_0)$.

(vii) Welches Monotonieverhalten besitzt a^x?

3 Sei I eine beliebige Indexmenge und $(a_i)_{i\in I}$ eine Familie von nicht-negativen Zahlen. Nehme an, es existiere eine Konstante c, so daß

$$\sum_{i\in J} a_i \leq c \qquad \forall\, J \subset I,\ J \text{ endlich},$$

dann sind h.a. viele $a_i \neq 0$.

4 Sei $((a_n))$ eine nur bedingt konvergente Reihe in $\mathbb{R}$, dann sind die Reihen $((a_n^+))$, $((a_n^-))$ divergent, wobei wir für $a \in \mathbb{R}$ definieren

$$a^+ = \max(a, 0), \qquad a^- = -\min(a, 0).$$