Übungen zu Analysis I

Blatt 7

1 Für $a > 0$ und $m \in \mathbb{N}^*$ haben wir a^m und $a^{\frac{1}{m}}$ bereits definiert. Setze

$$a^0 = 1,\ a^{-m} = (a^m)^{-1} \quad \text{und} \quad a^{-\frac{1}{m}} = (a^{\frac{1}{m}})^{-1}.$$

Zeigen Sie, daß sich dann a^x für alle $x \in \mathbb{Q}$ so definieren läßt, daß

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy} \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{Q}.$$

2 Mit Hilfe der *Youngschen Ungleichung*

$$xy \le \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{p'} y^{p'} \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^+,$$

hierbei sind p, p' sog. *konjugierte Exponenten*, d.h. $p, p' \in (1, \infty)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, vgl. Aufgabe 7 on page 195 von Exercises 3.8.10, beweise man (falls Sie Schwierigkeiten mit der Definition von x^p haben, wenn p irrational ist, nehmen Sie einfach an, p sei rational)

(i) Definiere für $p \in [1, \infty)$ die sog. p-Norm auf $\mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p = \big(\sum_{i=1}^n |x^i|^p\big)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall\, x = (x^i) \in \mathbb{R}^n,$$

dann gilt für $p \in (1, \infty)$ die sog. *Höldersche Ungleichung*

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|_p \, \|y\|_{p'} \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n;$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist dabei das euklidische Skalarprodukt.

(ii) $\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$

(iii) Setze $\|x\|_\infty = \max_i |x^i|$, so gelten (i) und (ii) auch für die Exponenten $p = 1$ und $p' = \infty$.

3 Zwei Normen $\|\cdot\|, ||| \cdot |||$ auf einem Vektorraum E heißen *äquivalent*, falls positive Konstanten c, c' existieren, so daß

$$c\,|||x||| \le \|x\| \le c'\,|||x||| \qquad \forall\, x \in E.$$

Man zeige, daß im $\mathbb{R}^n$ alle Normen äquivalent sind.

4 Sei $f(x) = \sum a_n x^n$ eine Potenzreihe in $\mathbb{R}$ mit Konvergenzradius $r > 0$. Konvergiert dann $x_k \to x_0$, $|x_0| < r$, so folgt $f(x_k) \to f(x_0)$.