Übungen zu Analysis I

Blatt 6

1 Man beweise Remark 1.1.23.

2 Sei $((a_n))$ eine divergente Reihe mit nicht-negativen Gliedern, dann ist

(i) $((\frac{a_n}{1+a_n}))$ divergent,

(ii) $((\frac{a_n}{1+n^2 a_n}))$ konvergent.

3 Wenn $((a_n^2))_{n\geq 1}$ konvergiert, dann auch $((\frac{a_n}{n}))_{n\geq 1}$.

4 Sei α eine reelle Zahl, so definieren wir die *Gaußklammer* durch

$$[\alpha] = \max\{\, n \in \mathbb{Z} \colon n \leq \alpha \,\}$$

Sei nun $0 \leq \alpha < 1$ und $1 < g \in \mathbb{N}$, so definiere induktiv $a_0 = 0$ und

$$a_i = \Big[g^i \Big(\alpha - \sum_{k=0}^{i-1} a_k g^{-k} \Big) \Big], \quad i \geq 1.$$

Dann gilt

(i) $0 \leq a_i < g$,

(ii) $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i g^{-i}$,

(iii) Die Reihendarstellung ist eindeutig, wenn f.a. $a_i \neq g-1$.

5 Sei (a_n) eine beschränkte Folge. Für welche reellen Zahlen x ist die Reihe $((a_n x^n))$ absolut konvergent und für welche divergent?