Übungen zu Analysis I

Blatt 4

1 Man zeige, daß für alle $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, gilt: $m!(n-m)!$ teilt $n!$.
Hinweis: $(n+1)! = n!(n+1-m) + n!m$.

2 Definieren Sie für $m, n \in \mathbb{N}$ die *Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{m} \in \mathbb{N}$ durch

$$\binom{n}{m} = \begin{cases} \frac{n!}{m!(n-m)!}, & m \leq n, \\ 0, & m > n. \end{cases}$$

Es gilt dann

(i) $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$,

(ii) $\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}, \qquad 1 \leq m \leq n$,

(iii) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,

(iv) $\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$.

3 Man beweise die verallgemeinerte binomische Formel (0.4.87).

4 Bezeichne als *Abstand* zweier reeller Zahlen den Ausdruck $d(x, y) = |x-y|$.
Man leite dann die sog. *Dreiecksungleichung*

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \qquad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R} \tag{1}$$

her.
Auch die Ungleichung

$$|x + y| \leq |x| + |y| \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R} \tag{2}$$

wird als Dreiecksungleichung bezeichnet. Leiten sie diese bitte zuerst her und zeigen Sie, daß (1) hieraus folgt.

5 Man beweise Proposition 0.4.31 und Remark 0.4.32.
Hinweis: Der Beweis von Proposition 0.4.31 ist etwas schwierig und muß nicht unbedingt von allen erbracht werden; verwenden Sie bitte die Hinweise aus der Vorlesung oder aus dem Buch.