Übungen zu Analysis I

Blatt 3

1 Sei E eine Menge, die n Elemente enthält, dann enthält $\mathcal{P}(E)$ 2^n Elemente.

2 Sei $A = \{1, \ldots, n\}$ und $P_n = \{\, \pi \colon \pi$ bildet A bijektiv in sich ab$\,\}$ die Menge aller *Permutationen* von A. Zeigen Sie, daß $\operatorname{card} P_n = n!$ ist.

3 Definieren Sie bitte innerhalb der rellen Zahlen rekursiv

(i) $\sum_{k=1}^{n} x_k$

(ii) $\prod_{k=1}^{n} x_k$

(iii) x^n

und weisen Sie nach, daß Summe und Produkt *kommutativ* sind, d.h. von der Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren unabhängig.

4 Man leite aus den Axiomen her

(i) $\prod_{i=1}^{n} x_i = 0 \Longleftrightarrow \exists_i \, x_i = 0.$

(ii) $xy < 0 \Longleftrightarrow x > 0 \wedge y < 0$ oder umgekehrt.

5 Man beweise Note 0.4.22 und Note 0.4.23.

6 Sei $\epsilon > 0$, dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$xy \leq \frac{\epsilon}{2} x^2 + \frac{1}{2\epsilon} y^2.$$

7 Man beweise per Induktion die sog. *Bernouillesche Ungleichung*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},$$

falls $x > -1$.