Übungen zu Analysis I

Blatt 2

1 Sei $f : A \to B$ eine Abbildung und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von B. Dann gilt

$$f^{-1}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i),$$

$$f^{-1}(\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i).$$

2 Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Zeige, daß die folgenden Bedingungen äquivalent sind

(i) f ist injektiv.

(ii) Für jede Teilmenge $M \subset A$ gilt

$$f^{-1}(f(M)) = M.$$

(iii) Für jedes Paar von Teilmengen $M, N \subset A$ gilt

$$f(M \cap N) = f(M) \cap f(N).$$

(iv) Für alle disjunkten Paare $M, N \subset A$ gilt

$$f(M) \cap f(N) = \emptyset.$$

(v) Für alle Paare $M \subset N \subset A$ gilt

$$f(N \backslash M) = f(N) \backslash f(M).$$

3 Seien A, B, C, D Mengen und $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ Abbildungen. Zeige, daß alle drei Abbildungen bijektiv sind, falls dies auf $g \circ f$ und $h \circ g$ zutrifft.

4 Man beweise Proposition 0.3.19.

5 Sei E eine unendliche Menge und $A \subset E$ eine h.a. Teilmenge. Zeige, daß $E \sim E \backslash A$, falls $E \backslash A$ unendlich ist.

6 Sei E eine Menge, dann sind $\mathcal{P}(E)$ und die Menge aller Abbildungen von E nach $\{0, 1\}$ gleichmächtig.