Übungen zu Analysis I

Blatt 12

1 Man zeige, daß $A \subset E$ genau dann präkompakt ist, wenn $\bar{A}$ präkompakt ist.

2 Man beweise, daß $\bar{A} \subset E$ genau dann folgenkompakt ist, wenn jede Folge (x_n) aus A eine in E konvergente Teilfolge enthält.

3 Sei E ein kompakter metrischer Raum und $\varLambda$ eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen von E mit der Eigenschaft, daß der Durchschnitt endlich vieler Mengen aus $\varLambda$ ungleich der leeren Menge ist. Dann gilt

$$\bigcap_{A \in \varLambda} A \neq \emptyset.$$

4 Sei E ein metrischer Raum und K_n eine monoton fallende Folge von nichtleeren kompakten Teilmengen, d.h. $K_{n+1} \subset K_n \; \forall\, n$. Dann gilt

$$\bigcap_n K_n \neq \emptyset.$$

5 Seien K_1, K_2 disjunkte kompakte Mengen in einem metrischen Raum E, so können K_1 und K_2 durch offene Mengen getrennt werden, d.h. es gibt disjunkte offene Mengen $\varOmega_i \subset E$, $i = 1, 2$, so daß

$$K_i \subset \varOmega_i, \qquad i = 1, 2.$$

6 Zeigen Sie, daß die abgeschlossene Einheitskugel im Folgenraum l_2, versehen mit dem kanonischen Skalarprodukt, nicht kompakt ist.

Hinweis: Betrachten Sie die speziellen Vektoren $e_i \in l_2$, $i \in \mathbb{N}$, die in Beispiel 1.4.6, (iii), definiert sind. Überzeugen Sie sich, daß die e_i Einheitsvektoren sind, die paarweise orthogonal sind, d.h. es gilt

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

und beweisen Sie, daß deren Existenz nicht mit der Kompaktheit der abgeschlossen Einheitskugel verträglich ist.