Übungen zu Analysis I

Blatt 11

1 Sei E ein metrischer Raum und $A \subset E$. Man beweise, daß $d(x, A)$ stetig ist in E.

2 Man beweise Proposition 2.2.9.

3 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R},$$

dann gilt $f(x) = \lambda x$ mit einer reellen Zahl λ.

4 Sei $n \to r_n$ eine Abzählung der rationalen Zahlen im Intervall $I = [0, 1]$. Für $x \in I$ definiere

$$A(x) = \{\, n \in \mathbb{N} \colon r_n < x \,\}$$

und

$$f(x) = \sum_{n \in A(x)} 2^{-n}.$$

Dann ist die Einschränkung φ von f auf die Menge der irrationalen Zahlen stetig; φ kann aber nicht als stetige Funktion auf ganz I fortgesetzt werden.

5 Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, dann ist A stetig.

6 Seien E, E' metrische Räume und $f : E \to E'$. Dann gilt

$$f \quad \text{stetig} \quad \Longleftrightarrow \quad f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} \quad \forall\, A \subset E.$$