
15. Das Rekursionstheorem

Wir kommen in diesem Abschnitt auf Folgerungen aus der Existenz von Gödelnummerierungen für die partiell rekursiven Funktionen zurück. Im Mittelpunkt wird das Rekursionstheorem stehen, das in seiner Fixpunktversion intuitiv besagt, dass jede effektive Programmtransformation einen Fixpunkt besitzt, also ein Programm auf ein äquivalentes Programm abbildet. Das Rekursionstheorem ist ein mächtiges Werkzeug in der Berechenbarkeitstheorie. Es dient sowohl für den Beweis von Unentscheidbarkeits- wie auch Entscheidbarkeitsergebnissen. Ein Beispiel für Ersteres wird der Beweis des Satzes von Rice sein, der grob gesprochen besagt, dass alle expliziten semantischen Eigenschaften von Programmen unentscheidbar sind. Ein Beispiel für Letzteres wird die Angabe von total rekursiven Funktionen sein, die nicht primitiv rekursiv sind.

In diesem Abschnitt gehen wir davon aus, dass ein beliebiges System von Gödelnummerierungen der partiell rekursiven Funktionen jeder Stelligkeit gegeben ist. Zur Vereinfachung der Notation bezeichnen wir für jedes $n \geq 1$ die zugehörige Gödelnummerierung mit φ und wir schreiben $\{e\}$ für den e -ten Zweig φ_e von φ . (Die Stelligkeit von φ bzw. $\{e\}$ wird sich stets aus dem Kontext ergeben. Insbesondere gelten die Ergebnisse in diesem Abschnitt also für die auf der Gödelisierung von Turingmaschinen basierenden Gödelnummerierungen aus dem Normalformatsatz.

Wir leiten zunächst aus der Existenz rekursiver Übersetzungsfunktionen für φ die Existenz rekursiver Funktionen ab, die aus dem Index einer $(m+n)$ -stelligen Funktion f und Parametern $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{N}$ ($m \geq 1, n \geq 0$) den Index der n -stelligen Funktion $f_{(y_1, \dots, y_m)}$ berechnen, die man erhält, wenn man die ersten m Eingaben der Funktion f als y_1, \dots, y_m festhält.

15.1 SATZ. (S - m - n -THEOREM) *Zu jedem $m \geq 1$ und $n \geq 0$ gibt es eine $(m+1)$ -stellige total rekursive Funktion S_n^m mit*

$$\forall e \in \mathbb{N} \forall \vec{y} \in \mathbb{N}^m \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^n (\{S_n^m(e, \vec{y})\}(\vec{x}) = \{e\}(\vec{y}, \vec{x})). \quad (15.1)$$

BEWEIS. Die durch

$$\begin{aligned} \psi(z, \vec{x}) &= \{(z)_1\}((z)_2, \dots, (z)_{m+1}, \vec{x}) \\ &= \varphi((z)_1, (z)_2, \dots, (z)_{m+1}, \vec{x}) \end{aligned}$$

definierte Funktion $\psi^{(n+1)}$, die ihre erste Eingabe als kodiertes $(m+1)$ -Tupel bestehend aus dem Index einer $(m+n)$ -stelligen partiellen Funktion, sowie den ersten Eingaben für dieselbe interpretiert, ist partiell rekursiv. Es gibt also eine rekursive Übersetzungsfunktion h von ψ nach φ . Definiert man hiermit die rekursive Funktion

$$S_n^m(e, \vec{y}) = h(\langle e, \vec{y} \rangle) \quad (\vec{y} \in \mathbb{N}^m),$$

so gilt

$$\begin{aligned} \{S_n^m(e, \vec{y})\}(\vec{x}) &= \{h(\langle e, \vec{y} \rangle)\}(\vec{x}) \\ &= \varphi(h(\langle e, \vec{y} \rangle), \vec{x}) \\ &= \psi(\langle e, \vec{y} \rangle, \vec{x}) \\ &= \{e\}(\vec{y}, \vec{x}), \end{aligned}$$

d.h. S_n^m hat die gewünschten Eigenschaften. \square

BEMERKUNG. Da die Gödelnummerierungen aus dem Normalformsatz *primitiv* rekursive Übersetzungsfunktionen besitzen, sind für diese Gödelnummerierungen auch die S_n^m -Funktionen primitiv rekursiv. (Dies gilt jedoch nicht für alle Gödelnummerierungen.)

Mit Hilfe des *S-m-n*-Theorems kann man die Rekursivität bestimmter Programmtransformationen für das Programmiersystem φ nachweisen. Wir verdeutlichen dies am Beispiel der simultanen Substitution.

15.2 KOROLLAR. *Die Klasse der partiell rekursiven Funktionen ist rekursiv gegen die simultane Substitution abgeschlossen. D.h. sind $h^{(m)}, g_1^{(n)}, \dots, g_m^{(n)}$ partiell rekursive Funktionen, so lässt sich ein Index von $f = h(g_1, \dots, g_m)$ rekursiv aus Indizes von h, g_1, \dots, g_m berechnen.*

BEWEIS. Man definiert zunächst die $(m+n+1)$ -stellige partiell rekursive Funktion

$$\begin{aligned} \psi(e, e_1, \dots, e_m, \vec{x}) &= \{e\}(\{e_1\}(\vec{x}), \dots, \{e_m\}(\vec{x})) \\ &= \varphi^{(m+1)}(e, \varphi^{(n+1)}(e_1, \vec{x}), \dots, \varphi^{(n+1)}(e_m, \vec{x})), \end{aligned}$$

die die Substitution beschreibt. Für einen Index i von ψ gilt dann nach dem *S-m-n*-Theorem

$$\begin{aligned} \{S_n^{(m+1)}(i, e, e_1, \dots, e_m)\}(\vec{x}) &= \{i\}(e, e_1, \dots, e_m, \vec{x}) \\ &= \{e\}(\{e_1\}(\vec{x}), \dots, \{e_m\}(\vec{x})) \\ &= \{e\}(\{e_1\}, \dots, \{e_m\})(\vec{x}). \end{aligned}$$

D.h. $k(e, e_1, \dots, e_m) = S_n^{m+1}(i, e, e_1, \dots, e_m)$ ist die gewünschte rekursive Funktion. \square

Wir betrachten nun die erste Version des Rekursionstheorems.

15.3 SATZ. (REKURSIONSTHEOREM, 1. VERSION) *Zu jedem $n \geq 1$ und zu jeder $(n+1)$ -stellige partiell rekursive Funktion ψ gibt es eine Zahl $k \in \bar{\mathbb{N}}$ mit $\psi_k = \{k\}$, d.h.*

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{N}^n (\psi_k(\vec{x}) = \psi(k, \vec{x}) = \varphi(k, \vec{x}) = \varphi_k(\vec{x}) = \{k\}(\vec{x})).$$

BEWEIS. Im Abschnitt 12 haben wir gesehen, dass die Existenz universeller Funktionen gewisse Diagonalisierungen unmöglich macht. Ähnlich definieren wir hier mit Hilfe des *S-m-n*-Theorems eine Diagonale, die den gewünschten Fixpunkt k liefert: Zu gegebenem $\psi^{(n+1)} \in \text{F(REK)}$ definieren wir die partiell rekursive Funktion

$$\xi(y, \vec{x}) = \psi(S_n^1(y, y), \vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathbb{N}^n, y \in \mathbb{N}).$$

Für einen Index i von ξ gilt dann

$$\begin{aligned} \{S_n^1(i, i)\}(\vec{x}) &= \{i\}(i, \vec{x}) && (S\text{-}m\text{-}n\text{-Theorem}) \\ &= \xi(i, \vec{x}) && (i \text{ Index von } \xi) \\ &= \psi(S_n^1(i, i), \vec{x}) && (\text{Definition von } \xi), \end{aligned}$$

weshalb $\psi_k = \{k\}$ für $k = S_n^1(i, i)$ gilt. \square

Das Rekursionstheorem hat auf den ersten Blick überraschende Folgerungen. Gödelisieren wir zum Beispiel zwei universelle Berechnungsmodelle, wie z.B. das Register- und Turingmaschinenmodell, und lassen ψ und ϕ die zugehörigen universellen Funktionen sein, dann gibt es eine Zahl k , sodass die k -te Registermaschine äquivalent zu der k -ten Turingmaschine ist (da $\psi_k = \phi_k$). Weiter folgt aus dem Rekursionstheorem, dass jede effektive Programmtransformation einen Fixpunkt besitzt, d.h. zumindest ein Programm auf ein äquivalentes abbildet:

15.4 KOROLLAR. (FIXPUNKTSATZ; 2. VERSION DES REKURSIONSTHEOREMS) *Zu jeder 1-stelligen total rekursiven Funktion f und zu jedem $n \geq 1$ gibt es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $\{f(k)\}^{(n)} = \{k\}^{(n)}$, d.h.*

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{N}^n (\{f(k)\}^{(n)}(\vec{x}) = \phi(f(k), \vec{x}) = \phi(k, \vec{x}) = \{k\}(\vec{x})).$$

BEWEIS. Für $f^{(1)} \in F(\text{REK})$ total ist die durch

$$\psi(y, \vec{x}) = \phi(f(y), \vec{x}) = \{f(y)\}(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathbb{N}^n, y \in \mathbb{N})$$

definierte Funktion ψ partiell rekursiv. Nach der 1. Version des Rekursionstheorems gibt es also eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $\psi_k = \phi_k$, d.h. $\{f(k)\} = \{k\}$. \square

Das Rekursionstheorem gibt uns eine neue Methode zum Nachweis der Unentscheidbarkeit von Problemen, indem wir aus der hypothetischen Entscheidbarkeit des Problems eine fixpunktfreie effektive Programmtransformation herleiten. Wir demonstrieren dies am Beispiel des diagonalen Halteproblems $K_d = \{e : \{e\}(e) \downarrow\}$: Wäre K_d rekursiv, so wäre auch

$$\psi(e, x) = \begin{cases} \phi(e, x) & e \neq x, \\ \phi(e, e) + 1 & e = x \text{ \& } e \in K_d, \\ 0 & e = x \text{ \& } e \notin K_d \end{cases}$$

partiell rekursiv und nach Definition von ψ gilt $\psi_e \neq \phi_e$ für alle e , im Widerspruch zur 1. Version des Rekursionstheorems. (Anders ausgedrückt: Die Übersetzungsfunktion h von ψ nach ϕ ist eine fixpunktfreie effektive Programmtransformation im Widerspruch zum Fixpunktsatz.) Ähnlich kann man ganz allgemein zeigen, dass jede *semantische* Eigenschaft von (TM-)Programmen unentscheidbar ist. Um dies zu präzisieren führen wir den Begriff der Indexmenge ein, wobei wir uns auf den Fall 1-stelliger Funktionen beschränken.

15.5 DEFINITION. Die *Indexmenge* $\text{IND}(\phi)$ einer 1-stelligen partiell rekursiven Funktion ψ ist die Menge aller Indizes von ψ :

$$\text{IND}(\psi) = \{e : \{e\} = \psi\}.$$

Die *Indexmenge* $\text{IND}(F)$ einer Menge F 1-stelliger partiell rekursiver Funktionen ist die Menge

$$\text{IND}(F) = \bigcup_{\psi \in F} \text{IND}(\psi) = \{e : \{e\} \in F\}.$$

Eine Menge $I \subseteq \mathbb{N}$ heißt *Indexmenge*, wenn sie Indexmenge einer Menge $F \subseteq \mathbb{F}^{(1)}(\text{REK})$ ist. I heißt *nichttriviale* Indexmenge, wenn $I = \text{IND}(F)$ für ein F mit $\emptyset \subset F \subset \mathbb{F}^{(1)}(\text{REK})$ ist.

Wie man leicht sieht, ist $I \subseteq \mathbb{N}$ genau dann eine Indexmenge, wenn

$$\forall e, e' \in \mathbb{N} (e \in I \& \{e\}^{(1)} = \{e'\}^{(1)} \Rightarrow e' \in I),$$

und I ist genau dann nichttrivial, wenn zusätzlich $\emptyset \subset I \subset \mathbb{N}$ gilt. Beispiele nichttrivialer Indexmengen sind:

- die Indexmenge $\text{IND}(\psi)$ jeder partiell rekursiven Funktion $\psi \in \mathbb{F}^{(1)}(\text{REK})$, die man auch als *Korrektheitsproblem* für ψ bezeichnet.
- die Indexmenge

$$\text{TOT} = \{e : \{e\} \text{ total}\}$$

der Menge der total rekursiven Funktionen, auch *Totalitätsproblem* genannt.

- die Indexmengen

$$\begin{aligned} \text{LEER} &= \{e : \text{Db}(\{e\}) = \emptyset\} && (\text{Leerheitsproblem}) \\ \text{FIN} &= \{e : \text{Db}(\{e\}) \text{ endlich}\} && (\text{Endlichkeitsproblem}) \\ \text{REK} &= \{e : \text{Db}(\{e\}) \text{ rekursiv}\} && (\text{Rekursivitätsproblem}) \\ \text{LEER} &= \{e : \text{Db}(\{e\}) \text{ } r\text{-vollständig für RA}\} && (\text{Vollständigkeitspr., } r = m, T) \end{aligned}$$

Letztere Indexmengen kann man auch als Entscheidungsprobleme für rekursiv aufzählbare Mengen auffassen, da ja $W_e = \text{Db}(\{e\})$ die e -te r.a. Menge ist.

Mit dem Rekursionstheorem kann man leicht zeigen, dass nichttriviale Indexmengen nicht rekursiv sind.

15.6 KOROLLAR. (SATZ VON RICE) Sei I eine nichttriviale Indexmenge. Dann ist I nicht rekursiv.

BEWEIS. Der Beweis ist indirekt. Wir nehmen an, dass I eine nichttriviale rekursive Indexmenge ist. Wegen der Nichttrivialität können wir $y, z \in \mathbb{N}$ mit $y \in I$ und $z \notin I$ wählen und wegen der Rekursivität von I ist

$$f(x) = \begin{cases} z & \text{falls } x \in I \\ y & \text{falls } x \notin I \end{cases}$$

total rekursiv. Da nach Definition von f

$$x \in I \Leftrightarrow f(x) \notin I,$$

folgt mit der Tatsache, dass I eine Indexmenge ist, dass $\{f(x)\} \neq \{x\}$ für alle x gilt. Dies widerspricht jedoch dem Fixpunktsatz. \square

Semantische Eigenschaften von Programmen, die zusätzlich von der Eingabe abhängen, sind i. Allg. keine Indexmenge. So ist von den Halteproblemen K, K_d, K_0 nur K_0 eine Indexmenge. Ebenso sind Probleme, die von mehreren Indices abhängen, wie z.B.

$$\ddot{A}QU = \{\langle e, e' \rangle : \{e\} = \{e'\}\} \quad (\ddot{A}quivalenzproblem)$$

keine (1-stelligen) Indexmengen. Hier kann man jedoch häufig eine Indexmenge reduzieren und somit die Nichtrekursivität zeigen. So lässt sich z.B. das Korrektheitsproblem für beliebiges $\psi^{(1)} \in F(\text{REK})$ auf das Äquivalenzproblem reduzieren, da für einen Index e_0 von ψ

$$e \in \text{IND}(\psi) \quad \Leftrightarrow \quad \langle e, e_0 \rangle \in \ddot{A}QU$$

gilt, also $\text{IND}(\psi) \leq_m \ddot{A}QU$ via $f(e) = \langle e, e_0 \rangle$ gilt.

Da für jedes $\psi^{(1)} \in F(\text{REK})$ die Indexmenge $\text{IND}(\psi)$ nicht rekursiv, also insbesondere unendlich ist, folgt aus dem Satz von Rice, dass jede partiell rekursive Funktion unendlich viele Indices besitzt. (Für die Gödelnummerierung aus dem Normalformsatz ist das intuitiv klar, da man jedes TM-Programm einfach in unendlich viele äquivalente Programme überführen kann, indem man wirkungslose Programmzeilen hinzufügt.)

Wir können diese Beobachtung verwenden, um die Existenz von 1-universellen Funktionen für $F(\text{REK})$ zu zeigen, die keine Gödelnummerierungen sind.

15.7 SATZ. *Es gibt eine 1-universelle Funktion $\psi^{(2)}$ von $F(\text{REK})$, die keine Gödelnummerierung ist.*

BEWEIS. Unter Verwendung der gegebenen Gödelnummerierung φ definieren wir ψ so, dass ψ universell ist aber die nirgends definierte Funktion v bzgl. ψ nur einen Index hat, nämlich $v = \psi_0$. Wie oben beobachtet, ist ψ dann keine Gödelnummerierung. Zur Definition von ψ benutzen wir eine Fallunterscheidung:

$$\psi(e, x) = \begin{cases} \uparrow & \text{falls } e = 0 \\ \varphi((e-1)_1, x) & \text{falls } e > 0 \text{ \& } (e-1)_2 \neq x \\ (e-1)_3 & \text{falls } e > 0 \text{ \& } (e-1)_2 = x \end{cases}$$

Offensichtlich ist ψ partiell rekursiv. Dass ψ die gewünschten Eigenschaften besitzt, ergibt sich daher aus folgenden Beobachtungen. Offensichtlich gilt $v = \psi_0$. Für $e > 0$, etwa $e = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle + 1$ gilt dagegen $\psi_e(e_2) = e_3$, weshalb $\psi_e \neq v$. Die Null ist also der einzige ψ -Index für v .

Zu zeigen bleibt, dass jedes $\xi \in F^{(n)}(\text{REK}) - \{v\}$ ebenfalls einen ψ -Index besitzt. Hierzu wählen wir einen φ -Index e_1 für ξ (d.h. $\xi = \varphi_{e_1}$), eine Zahl $e_2 \in \text{Db}(\xi)$ (wegen $\xi \neq v$ ist $\text{Db}(\xi) \neq \emptyset!$) und setzen $e_3 = \xi(e_2)$. Dann ist $e = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle + 1$ ein ψ -Index für ξ . Für $x \neq e_2$ gilt nämlich nach der 2. Klausel in der Definition von ψ

$$\psi_e(x) = \psi(e, x) = \varphi((e-1)_1, x) = \varphi(e_1, x) = \varphi_{e_1}(x) = \xi(x)$$

und für $x = e_2$ gilt nach der 3. Klausel

$$\psi_e(x) = \psi_e(e_2) = \psi(e, (e-1)_2) = (e-1)_3 = e_3 = \xi(e_2) = \xi(x).$$

□

Zu den weiteren Anwendungen des Rekursionstheorems gehört der Nachweis der Rekursivität implizit definierter Funktionen. Wir erläutern dies zunächst am Beispiel der Wertverlaufsrekursion, indem wir einen alternativen Beweis für den Abschluss von $F(\text{REK})$ gegen dieses Rekursionsschema geben. Seien also $g^{(n)}, h^{(n+2)}$ partiell rekursiv und sei $f^{(n+1)} = \text{WR}(g, h)$ definiert durch

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, 0) &= g(\vec{x}) \\ f(\vec{x}, y+1) &= h(\vec{x}, y, \langle f(\vec{x}, 0), \dots, f(\vec{x}, y) \rangle). \end{aligned}$$

Würden wir einen Index e von f im Voraus kennen, so könnten wir f *explizit* definieren, indem wir auf der rechten Seite der 2. Gleichung f durch $\{e\}$ ersetzen, und damit $f \in F(\text{REK})$ zeigen. Die scheinbare Zirkelhaftigkeit dieses Arguments können wir mit Hilfe des Rekursionstheorems auflösen: Wir lassen die Definition von f von dem zusätzlichen Parameter z abhängen und argumentieren, dass der Fixpunkt e dann f korrekt beschreibt. Wir definieren also

$$\psi(z, \vec{x}, y) = \begin{cases} g(\vec{x}) & \text{falls } y = 0 \\ h(\vec{x}, y-1, \langle \{z\}(\vec{x}, 0), \dots, \{z\}(\vec{x}, y-1) \rangle) & \text{falls } y > 0. \end{cases}$$

Da (für $y \geq 1$)

$$\langle \{z\}(\vec{x}, 0), \dots, \{z\}(\vec{x}, y-1) \rangle = \mu u (l(u) = y \ \& \ \forall i < y ((u)_{i+1} = \{z\}(\vec{x}, i)))$$

ist ψ partiell rekursiv. Nach dem Rekursionssatz gibt es also eine Zahl e mit $\psi_e = \{e\}$, d.h.

$$\psi_e(\vec{x}, 0) = g(\vec{x})$$

und für $y > 0$

$$\begin{aligned} \psi_e(\vec{x}, y) &= h(\vec{x}, y-1, \langle \{e\}(\vec{x}, 0), \dots, \{e\}(\vec{x}, y-1) \rangle) \\ &= h(\vec{x}, y-1, \langle \psi_e(\vec{x}, 0), \dots, \psi_e(\vec{x}, y-1) \rangle), \end{aligned}$$

weshalb $\psi_e = \text{WR}(g, h) = f$.

Wir können also mit Hilfe des Rekursionssatzes eine effektive implizite Definition einer partiell berechenbaren Funktion in eine effektive explizite Definition derselben überführen und damit diese als partiell rekursiv nachweisen. Dabei gehen wir – grob gesprochen – wie im obigen Beispiel davon aus, dass wir einen Index der Funktion a priori kennen.

Im Folgenden benutzen wir diese Idee, um Funktionen anzugeben, die total rekursiv aber nicht primitiv rekursiv sind. Hierzu zeigen wir zunächst, dass die Aufzählungsfunktion von $F(\text{PRIM})$ total rekursiv ist. Als zweites Beispiel werden wir dann noch die sog. Ackermann-Funktion betrachten. Von dieser rekursiven Funktion kann man zeigen, dass sie schneller als jede primitiv rekursive Funktion anwächst.

In Abschnitt 12 haben wir gesehen, dass $F(\text{PRIM})$ keine n -universellen Funktionen besitzt. Durch Gödelisierung können wir jedoch eine berechenbare Aufzählungsfunktion der n -stelligen primitiv rekursiven Funktionen angeben, von der wir zeigen, dass sie rekursiv ist.

15.8 SATZ. Für jedes $n \geq 1$ gibt es eine total rekursive Funktion $\text{npr} : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$, die die n -stelligen primitiv rekursiven Funktionen aufzählt, d.h.

$$\{\text{npr}_e : e \geq 0\} = F^{(n)}(\text{PRIM}).$$

BEWEIS. Wir definieren eine 2-stellige total rekursive Funktion pr mit

- (i) $\forall n \geq 1 \forall f^{(n)} \in F(\text{PRIM}) \exists e \forall \vec{x} \in \mathbb{N}^n (f(\vec{x}) = \text{pr}(e, \langle \vec{x} \rangle) = \text{pr}_e(\langle \vec{x} \rangle))$
- (ii) $\forall n \geq 1 \forall e \in \mathbb{N} (f(x_1, \dots, x_n) = \text{pr}_e(\langle x_1, \dots, x_n \rangle))$ ist primitiv rekursiv

Für jedes $n \geq 1$ hat die $(n+1)$ -stellige Funktion npr mit

$$\text{npr}(e, x_1, \dots, x_n) = \text{pr}(e, \langle x_1, \dots, x_n \rangle)$$

dann die gewünschte Eigenschaft.

Zur Definition von pr gödelisieren wir zunächst die primitiv rekursiven Funktionen (genauer: deren primitiv rekursive Darstellungen):

$$\ulcorner S \urcorner = \langle 1, 1 \rangle$$

$$\ulcorner U_i^n \urcorner = \langle 2, n, i \rangle$$

$$\ulcorner C_i^n \urcorner = \langle 3, n, i \rangle$$

$$\text{Für } f^{(n)} = g^{(m)}(h_1^{(n)}, \dots, h_m^{(n)}) :$$

$$\ulcorner f \urcorner = \langle 4, n, \ulcorner g \urcorner, \langle \ulcorner h_1 \urcorner, \dots, \ulcorner h_m \urcorner \rangle \rangle$$

$$\text{Für } f^{(n+1)} = \text{PR}(g^n, h^{(n+2)}) :$$

$$\ulcorner f \urcorner = \langle 5, n+1, \ulcorner g \urcorner, \ulcorner h \urcorner \rangle$$

Es ist also $\ulcorner f \urcorner$ ein kodiertes 3- oder 4-Tupel, wobei die erste Komponente den Typ von f angibt, die zweite Komponente die Stelligkeit und die weiteren Komponente(n) die Beschreibung von f vervollständigen.

Als Nächstes zeigen wir mit Hilfe des Rekursionstheorems, dass das Prädikat

$$\text{PRIM}(x) \Leftrightarrow x \text{ Gödelnummer einer primitiv rekursiven Funktion}$$

rekursiv ist. Dazu definieren wir eine 2-stellige partiell rekursive Funktion ψ so, dass für den Fixpunkt k (d.h. $\psi_k = \{k\}$) gilt, dass ψ_k die charakteristische Funktion von PRIM ist:

$$\psi(e, x) = \begin{cases} \psi_1(e, x) & \text{falls } (x)_1 = 1 \ \& \ x = \langle 1, 1 \rangle \\ \psi_2(e, x) & \text{falls } (x)_1 = 2 \ \& \ l(x) = 3 \ \& \ 1 \leq (x)_3 \leq (x)_2 \\ \psi_3(e, x) & \text{falls } (x)_1 = 3 \ \& \ l(x) = 3 \\ \psi_4(e, x) & \text{falls } (x)_1 = 4 \ \& \ l(x) = 4 \ \& \ l((x)_4) = (x)_{3,2} \\ & \ \& \ \forall i < l((x)_4) \ ((x)_{4,i+1,2} = (x)_2) \\ \psi_5(e, x) & \text{falls } (x)_1 = 5 \ \& \ l(x) = 4 \ \& \ (x)_2 = (x)_{3,2} + 1 \\ & \ \& \ (x)_2 + 1 = (x)_{4,2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei

$$\psi_1(e, x) = \psi_2(e, x) = \psi_3(e, x) = 1$$

$$\psi_4(e, x) = \{e\}((x)_3) \cdot \prod_{i < l((x)_4)} \{e\}((x)_{4,i+1})$$

$$\psi_5(e, x) = \{e\}((x)_3) \cdot \{e\}((x)_4).$$

Dass für einen Fixpunkt k mit $\psi_k = \{k\}$ die Äquivalenz

$$\psi_k(x) = 1 \Leftrightarrow x \text{ Gödelnummer einer primitiv rekursiven Funktion}$$

gilt, zeigt man durch Induktion nach x . Hierzu beachtet man, dass die ersten 5 Fälle den 5 möglichen Typen einer primitiv rekursiven Funktion entsprechen, wobei im Fall der Grundfunktionen, d.h. den Fällen 1-3 die Behauptung klar ist, da hier in den entsprechenden Fällen die Gödelnummern vollständig beschrieben werden. In den Fällen 4 und 5 muss man induktiv argumentieren. Wir beschreiben den Fall 4, d.h. den Fall, dass x (möglicherweise) die Gödelnummer einer durch simultane Substitution entstandenen Funktion $f = g(h_1, \dots, h_m)$ ist. Dieser Fall trifft (wegen $(x)_1 = 4$ und $l(x) = 4$) nur auf eine Zahl $x = \langle 4, x_2, x_3, x_4 \rangle$ zu, die, falls $x_3 = \ulcorner g \urcorner$ und $x_4 = \langle \ulcorner h_1 \urcorner, \dots, \ulcorner h_m \urcorner \rangle$ für primitiv rekursive Funktionen g, h_1, \dots, h_m gilt, die Eigenschaft hat, dass die Stelligkeiten dieser Funktionen eine Substitution erlauben, nämlich (wegen $l((x)_4) = (x)_{3,2}$) g m -stellig ist und alle Funktionen h_i x_2 -stellig sind (wegen $(x)_{4,i,2} = (x)_2$). Trifft der 4. Fall auf x zu, so ist x also genau dann eine Gödelnummer, wenn $(x)_3$ sowie alle Komponenten der kodierten Folge $(x)_4$ Gödelnummern sind. Nach Induktionsvoraussetzung gilt aber $\psi_4(k, x) = 1$ genau in diesem Fall.

Über das rekursive Prädikat PRIM definieren wir für $j = 1, \dots, 5$ die rekursiven Prädikate

$$\text{PRIM}_j(x, y) \Leftrightarrow \text{PRIM}(x) \ \& \ (x)_1 = j \ \& \ (x)_2 = l(y)$$

die gerade besagen

$$\text{PRIM}_j(x, y) \Leftrightarrow x \text{ ist die Gödelnummer einer primitiv rekursiven Funktion } f \text{ vom Typ } j \text{ und } y \text{ kodiert ein mögliches Eingabetupel für } f.$$

Wir verwenden nun diese Prädikate um die Funktion pr wiederum mit Hilfe des Rekursionsatzes zu definieren. D.h. wir definieren eine partielle rekursive Funktion ξ , sodass für k mit $\xi_k = \{k\}$ gilt, dass $\xi_k = \text{pr}$. Hierzu setzen wir

$$\xi(e, i, x) = \begin{cases} \xi_1(e, i, x) & \text{falls } \text{PRIM}_1(i, x) \\ \xi_2(e, i, x) & \text{falls } \text{PRIM}_2(i, x) \\ \xi_3(e, i, x) & \text{falls } \text{PRIM}_3(i, x) \\ \xi_4(e, i, x) & \text{falls } \text{PRIM}_4(i, x) \\ \xi_5(e, i, x) & \text{falls } \text{PRIM}_5(i, x) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei

$$\xi_1(e, i, x) = (x)_1 + 1$$

$$\xi_2(e, i, x) = (x)_{(i)_3}$$

$$\xi_3(e, i, x) = (i)_3$$

$$\xi_4(e, i, x) = \{e\}((i)_3, \zeta(e, i, x)) \text{ mit}$$

$$\zeta(e, i, x) = \mu z(l(z) = (i)_{3,2} \ \& \ \forall y < z((z)_{y+1} = \{e\}((i)_{4,y+1}, x)))$$

sowie

$$\xi_5(e, i, x) = \begin{cases} \{e\}((i)_3, \text{vor}(x)) & \text{falls } (x)_{l(x)} = 0 \\ \{e\}((i)_4, \text{vor}(x) \circ \{e\}(i, \text{vor}(x))) & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei

$$\text{vor}(x) = \begin{cases} \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle & \text{falls } x = \langle x_1, \dots, x_{n-1}, 0 \rangle \\ \langle x_1, \dots, x_{n-1}, y \rangle & \text{falls } x = \langle x_1, \dots, x_{n-1}, y+1 \rangle \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ξ ist partiell rekursiv, da die in den Einzelfällen gewählten Funktionen partiell rekursiv sind. Hierzu beachte man, dass die Hilfsfunktion vor primitiv rekursiv ist, was sich aus folgender Darstellung ergibt:

$$\text{vor}(x) = \begin{cases} \mu y \leq x (l(y) = l(x) - 1 \ \& \ \forall z < l(y) ((y)_{z+1} = (x)_{z+1})) & \text{falls } l(x) \geq 1 \ \& \ (x)_{l(x)} = 0 \\ \mu y \leq x (l(y) = l(x) \ \& \ \forall z < l(x) - 1 ((y)_{z+1} = (x)_{z+1}) & \ \& \ (y)_{l(x)} = (x)_{l(x)}) & \text{falls } l(x) \geq 1 \ \& \ (x)_{l(x)} \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei nun k ein Fixpunkt von ξ , d.h. $\xi_k = \{k\}$ und sei

$$\text{pr} = \xi_k = \{k\}$$

Die Korrektheit von pr ergibt sich aus dem Beweis folgender Behauptung.

Behauptung Ist e Gödelnummer einer n -stelligen primitiv rekursiven Funktion f , so gilt $\text{pr}(e, \langle \vec{x} \rangle) = f(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$ und für alle $\vec{y} \in \mathbb{N}^m$ mit $m \neq n$ gilt $\text{pr}(e, \langle \vec{y} \rangle) = 0$. Ist e keine Gödelnummer, so gilt $\text{pr}(e, x) = 0$ für alle x .

Der Beweis der Behauptung ist induktiv mit Hauptinduktion nach dem 1. Argument e von $\text{pr} = \xi_k$ und Nebeninduktion nach dem 2. Argument x . Seien also e und x gegeben und gelte die Behauptung für alle (e', x') , für die entweder $e' < e$ oder $e' = e$ und $x' < x$ gilt. Die interessanten Fälle sind, dass $\text{PRIM}_4(e, x)$ oder $\text{PRIM}_5(e, x)$ gilt. In den anderen Fällen folgt die Behauptung unmittelbar aus der Definition von $\text{pr}(e, x) = \xi(k, e, x)$ ohne Rückgriff auf die Induktionsvoraussetzung. Im Folgenden diskutieren wir den Fall $\text{PRIM}_4(e, x)$.

In diesem Fall gilt $e = \ulcorner f \urcorner = \langle 4, n, \ulcorner g \urcorner, \langle \ulcorner h_1 \urcorner \dots \ulcorner h_m \urcorner \rangle \rangle$ und $x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ für eine n -stellige primitiv rekursive Funktion $f = g(h_1, \dots, h_m)$ und ein n -Tupel $\vec{x} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \mathbb{N}^n$. Wir haben zu zeigen, dass

$$\text{pr}(e, x) = \xi(k, e, x) = \{k\}(e, x) = f(\vec{x}).$$

Da $\ulcorner g \urcorner, \ulcorner h_1 \urcorner, \dots, \ulcorner h_m \urcorner < e$, gilt nach Hauptinduktionsvoraussetzung

$$\text{pr}(\ulcorner h_i \urcorner, x) = \{k\}(\ulcorner h_i \urcorner, x) = h_i(\vec{x}) \quad (1 \leq i \leq m) \quad (15.2)$$

und

$$\text{pr}(\ulcorner g \urcorner, \langle \vec{y} \rangle) = \{k\}(\ulcorner g \urcorner, \langle \vec{y} \rangle) = g(\vec{y}) \quad (\vec{y} \in \mathbb{N}^m). \quad (15.3)$$

Aus (15.2) folgt für die in der Definition von ξ_4 verwendete Hilfsfunktion ζ

$$\begin{aligned}\zeta(k, e, x) &= \langle \{k\}(\ulcorner h_1 \urcorner, x), \dots, \{k\}(\ulcorner h_m \urcorner, x) \rangle \\ &= \langle h_1(\vec{x}), \dots, h_m(\vec{x}) \rangle.\end{aligned}$$

Mit (15.3) folgt hieraus aber

$$\begin{aligned}\text{pr}(e, x) &= \xi(k, e, x) = \xi_4(k, e, x) \\ &= \{k\}(\ulcorner g \urcorner, \zeta(k, e, x)) \\ &= \{k\}(\ulcorner g \urcorner, \langle h_1(\vec{x}), \dots, h_m(\vec{x}) \rangle) \\ &= g(h_1(\vec{x}), \dots, h_m(\vec{x})) \\ &= f(\vec{x}).\end{aligned}$$

Den 5. Fall, der der primitiven Rekursion entspricht, zeigt man entsprechend, wobei man beim Rekursionsschritt hier auf die Nebeninduktionsvoraussetzung zurückgreifen muss. \square

Aus Satz 15.8 erhalten wir nicht nur die Existenz total rekursiver Funktionen, die nicht primitiv rekursiv sind, sondern auch rekursive Mengen, die nicht primitiv rekursiv sind.

15.9 KOROLLAR. *Es gibt eine 0-1-wertige, n -stellige Funktion, die total rekursiv aber nicht primitiv rekursiv ist ($n \geq 1$).*

BEWEIS. Wir geben eine 1-stellige Funktion f mit den gewünschten Eigenschaften an. Für $n > 1$ übertragen sich dann diese Eigenschaften auf

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = f(\tau_n(x_1, \dots, x_n)).$$

Für die Funktion 1_{pr} aus Satz 15.8 sei

$$f(x) = \text{sg}(1_{\text{pr}}(\pi_1(x), \pi_2(x))).$$

Dann ist offensichtlich f total rekursiv und

$$U(x_1, x_2) = f(\tau(x_1, x_2))$$

ist eine Aufzählung der 1-stelligen 0-1-wertigen primitiv rekursiven Funktionen. Wäre also f primitiv rekursiv, so wäre dies auch U , weshalb U 1-universell für die 0-1-wertigen primitiv rekursiven Funktionen wäre. Dies ist aber nach Korollar 12.2 unmöglich. \square

Das erste Beispiel einer rekursiven Funktion, die nicht primitiv rekursiv ist, wurde von Ackermann angegeben. Er definierte hierzu eine rekursive Funktion, die schneller anwächst als alle primitiv rekursiven Funktionen. Im Folgenden führen wir eine Variante der Ackermann-Funktion ein. Diese ist durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\alpha(0, y) &= y + 1 \\ \alpha(x + 1, 0) &= \alpha(x, 1) \\ \alpha(x + 1, y + 1) &= \alpha(x, \alpha(x + 1, y))\end{aligned}$$

definiert. Dass $\alpha(x, y)$ für all $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ wohldefiniert, $\alpha : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ also eine totale Funktion ist, zeigt man durch Hauptinduktion nach x und Nebeninduktion nach y . Entsprechend kann man auch zeigen, dass jeder Zweig α_x der Ackermann-Funktion primitiv rekursiv ist:

15.10 LEMMA. Für alle $x \geq 0$ gilt $\alpha_x \in F(\text{PRIM})$.

BEWEIS. Wir zeigen dies durch Induktion nach x . Offensichtlich ist $\alpha_0 = S \in F(\text{PRIM})$, und α_{x+1} lässt sich wegen

$$\begin{aligned}\alpha_{x+1}(0) &= \alpha_x(1) \\ \alpha_{x+1}(y+1) &= \alpha_x(\alpha_{x+1}(y))\end{aligned}$$

mit einer primitiven Rekursion unter Rückgriff auf das nach I.V. primitiv rekursive α_x definieren. \square

Von der Funktion α selbst kann man jedoch nur die Rekursivität, nicht die primitive Rekursivität zeigen.

15.11 LEMMA. $\alpha \in F(\text{REK})$.

BEWEIS. Wir transformieren die implizite Definition von α in die explizite Definition der 3-stelligen Funktion

$$\psi(e, x, y) = \begin{cases} y+1 & \text{falls } x = 0 \\ \{e\}(x-1, 1) & \text{falls } x > 0 \text{ und } y = 0 \\ \{e\}(x-1, \{e\}(x, y-1)) & \text{falls } x, y > 0. \end{cases}$$

Für das nach dem Rekursionstheorem existierende k mit $\psi_k = \{k\}$ gilt dann $\alpha = \psi_k = \{k\}$. \square

Um zu zeigen, dass α nicht primitiv rekursiv ist, argumentiert man, dass die Anzahl der notwendigen primitiven Rekursionen in einer primitiv rekursiven Darstellung von α_x mit x wächst, zur Definition von α also eine endliche Folge von primitiven Rekursionen nicht ausreicht. Hierzu zeigt man (durch Induktion nach dem Aufbau von f), dass jede primitiv rekursive Funktion f von einem Zweig der Ackermann-Funktion majorisiert wird und diese streng monoton ist.

15.12 LEMMA. Für alle x, y gilt, $\alpha(x, y) < \alpha(x+1, y)$ und $\alpha(x, y) < \alpha(x, y+1)$.

15.13 LEMMA. Zu jeder n -stelligen primitiv rekursiven Funktion f gibt es eine Zahl e mit

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n \quad (f(x_1, \dots, x_n) < \alpha_e(x_1 + \dots + x_n))$$

Für Beweise dieser Lemmata verweisen wir auf die Literatur. Fassen wir diese Beobachtungen über die Ackermann-Funktionen zusammen, so sehen wir, dass deren Diagonale zwar rekursiv ist, aber schneller als jede primitiv rekursive Funktion anwächst.

15.14 SATZ. Für $\hat{\alpha}(x) = \alpha_x(x)$ gilt:

(i) $\hat{\alpha} \in F(\text{REK})$

(ii) $\hat{\alpha} \notin F(\text{PRIM})$. In der Tat gibt es zu jedem $f^{(1)} \in F(\text{PRIM})$ eine Zahl x_f mit $f(x) < \hat{\alpha}(x)$ für alle $x \geq x_f$.

BEWEIS. Behauptung (i) folgt direkt aus Lemma 15.11. Zum Beweis von (ii) wähle $f^{(1)} \in F(\text{PRIM})$. Nach Lemma 15.13 gibt es eine Zahl $e = x_f$, so dass $f(x) < \alpha_{x_f}(x)$ für alle x . Da nach Lemma 15.12

$$\alpha_{x_f}(x) \leq \alpha_x(x) = \hat{\alpha}(x)$$

für alle $x \geq x_f$, folgt hieraus die Behauptung. □