12. Unentscheidbare Mengen und die Diagonalisierungsmethode

In diesem Abschnitt verwenden wir die Existenz universeller Funktionen, um die Unentscheidbarkeit des Halteproblems für Turingmaschinen zu zeigen. Dies bedeutet nach der Church-Turing-These, dass wir einem Algorithmus i. Allg. nicht ansehen können, ob er für eine gegebene Eingabe terminiert.

Wir zeigen dies mit Hilfe eines Diagonal-Argumentes (Diagonalisierung). Neben Simulationen, von denen wir in den Beweisen des Äquivalenzsatzes und des Normalformsatzes bereits ausführlich Gebrauch gemacht haben, bilden Diagonalisierungen die zweite fundamentale Technik in der Berechenbarkeitstheorie. Für jede dieser Grundtechniken wurden sehr ausgeklügelte und oft auch sehr schwierige Varianten entwickelt. Hier reicht jedoch die einfachste auf Cantor zurückgehende Diagonalisierung aus.

Wir werden diese Technik zunächst verwenden, um zu zeigen, dass die Klassen der primitiv rekursiven und total rekursiven Funktionen keine universellen Funktionen besitzen. Wir zeigen dies in der folgenden sehr allgemeinen Form.

12.1 SATZ. *Sei* F *eine Klasse totaler (!) Funktionen über* $\mathbb{N}$*, die die Nachfolgerfunktion* S *sowie die Projektionen* U_i^n *enthält und die gegen die simultane Substitution abgeschlossen ist. Dann besitzt* F *keine* n*-universelle Funktion* $(n \geq 1)$*. Dasselbe gilt, wenn* F *statt* S *die Funktion* $\overline{sg}$ *enthält.*

BEWEIS. Wir beweisen den Satz für den Fall, dass $S \in \mathrm{F}$. (Der Fall, dass $\overline{sg} \in \mathrm{F}$, ist ähnlich.) Der Beweis ist indirekt. Wir gehen von der Widerspruchsannahme aus, dass $f^{(n+1)}$ n-universell für F ist. Dann gilt, dass die durch

$$\begin{aligned} g(x_1,\dots,x_n) = f(x_1,x_1,x_2,\dots,x_n)+1 = \\ = S(f(U_1^n,U_1^n,U_2^n,\dots,U_n^n))(x_1,\dots,x_n) \end{aligned}$$

definierte n-stellige Funktion g auch zu F gehört, da nach Annahme $f, S, U_i^n \in \mathrm{F}$ und F gegen simultane Substitution abgeschlossen ist.[1] Wegen der n-Universalität von f besitzt g also einen Index e bezüglich f. Wählt man e als erste Eingabe für g, so gilt also

$$g(e,x_2,\dots,x_n) = f(e,e,x_2,\dots,x_n)+1$$

nach Definition von g und

$$g(e,x_2,\dots,x_n) = f_e(e,x_2,\dots,x_n) = f(e,e,x_2,\dots,x_n)$$

[1] Die hinter der Definition von g stehende Idee wird für den Fall $n = 1$ am klarsten. Hier ist $g(x) = f_x(x)+1 = f(x,x)+1$. D.h. g unterscheidet sich an der Stelle x von dem Wert $f_x(x)$ des x-ten Zweiges f_x von f an derselben Stelle durch Erhöhen der Wertes um 1.

da e ein Index für g ist. Also gilt

$$f(e,e,x_2,\ldots,x_n)+1 = f(e,e,x_2,\ldots,x_n) \tag{12.1}$$

Da $f \in F$, also f total und damit $f(e,e,x_2,\ldots,x_n)$ definiert ist, ist dies jedoch unmöglich, da $y < y+1$ für jede Zahl y. (Ist $\overline{sg} \in F$, so definiert man

$$g(x_1,\ldots,x_n) = \overline{sg}(f(x_1,x_1,x_2,\ldots,x_n))$$

und erhält entsprechend

$$f(e,e,x_2,\ldots,x_n) = \overline{sg}(f(e,e,x_2,\ldots,x_n)) \tag{12.2}$$

im Widerspruch zu $\overline{sg}(y) \neq y$ für alle $y \in \mathbb{N}$.) □

12.2 KOROLLAR. *Die Klasse der total rekursiven Funktionen* $\mathrm{F}_{tot}(\mathrm{REK})$ *und die Klasse der primitiv rekursiven Funktionen* $\mathrm{F}(\mathrm{PRIM})$ *besitzen keine n-universellen Funktionen (für alle $n \geq 1$). Dasselbe gilt, wenn wir nur die* 0-1-*wertigen Funktionen, d.h. die Mengen, in diesen Klassen betrachten. Insbesondere sind die Klassen der total rekursiven Funktionen und rekursiven Mengen nicht uniform rekursiv.*

BEWEIS. Da $\mathrm{F}_{tot}(\mathrm{REK})$ und $\mathrm{F}(\mathrm{PRIM})$ die Voraussetzungen von Satz 12.1 erfüllen, folgt die erste Aussage unmittelbar aus Satz 12.1. Für die Einschränkung auf die 0-1-wertigen Funktionen beobachtet man, dass für 0-1-wertiges f aus $\mathrm{F}_{tot}(\mathrm{REK})$ bzw. $\mathrm{F}(\mathrm{PRIM})$ auch die im Beweis von Satz 12.1 konstruierte „Diagonale"

$$g(x_1,\ldots,x_n) = \overline{sg}(f(x_1,x_1,x_2,\ldots,x_n))$$

wiederum 0-1-wertig und aus $\mathrm{F}_{tot}(\mathrm{REK})$ bzw. $\mathrm{F}(\mathrm{PRIM})$ ist. Der dritte Teil des Korollars folgt unmittelbar aus den beiden ersten Teilen für $\mathrm{F}_{tot}(\mathrm{REK})$ und Definition 11.10 □

Im Beweis von Satz 12.1 benutzt man, dass für eine n-universelle Funktion f von F, $\{f_e : e \geq 0\}$ eine Liste der n-stelligen Funktionen in F ist. Die Funktion g definiert man dann als *Diagonale* zu dieser Folge, indem man g an der e-ten Stelle (für das 1. Argument) verschieden von der e-ten Funktion f_e der Liste an dieser Stelle macht, d.h. $g(e,\ldots) \neq f_e(e,\ldots)$ sicherstellt. Genau so hatte Cantor gezeigt, dass es überzählbar viele reelle Zahlen $r \in [0,1)$ gibt.

Für den Beweis ist es wesentlich, dass F nur totale Funktionen enthält und damit die hypothetische universelle Funktion f selbst wieder total ist. Andernfalls müssten (12.1) bzw. (12.2) keinen Widerspruch darstellen. Wäre nämlich $f(e,e,x_2,\ldots,x_n)$ undefiniert, so wären nach Definition der simultanen Substitution für partielle Funktionen auch die Funktionen $f(e,e,x_2,\ldots,x_n)+1$ und $\overline{sg}(f(e,e,x_2,\ldots,x_n))$ undefiniert, weshalb die Gleichungen (12.1) und (12.2) in diesem Fall korrekt wären. D.h. wir erhalten so keinen Widerspruch zu der im letzten Abschnitt gezeigten Existenz universeller Funktionen für die Klasse der partiell rekursiven Funktionen.

Diese Überlegungen zeigen uns aber, dass für eine n-universelle Funktion ψ für $\mathrm{F}(\mathrm{REK})$ der Definitionsbereich von ψ nicht rekursiv sein kann:

12.3 SATZ. *Sei ψ eine n-universelle Funktion für* $\mathrm{F}(\mathrm{REK})$ $(n \geq 1)$. *Dann ist der Definitionsbereich von ψ nicht rekursiv.*

BEWEIS. Der Beweis ist indirekt. Sei also $Db(\psi)$ rekursiv. Dann definieren wir für $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ die Diagonale g durch

$$g^{(n)}(\vec{x}) = \begin{cases} \psi(x_1, \vec{x}) + 1 & \text{falls } (x_1, \vec{x}) \in Db(\psi) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen der angenommenen Rekursivität von $Db(\psi)$ ist g partiell rekursiv, weshalb wir wegen der Universalität von ψ einen Index e für g festhalten können, d.h. $g = \psi_e$. Wir haben aber g so gewählt, dass $g(e, x_2, \ldots, x_n) \neq \psi_e(e, x_2, \ldots, x_n)$ für alle $x_2, \ldots, x_n$ gilt: Ist nämlich $\psi_e(e, x_2, \ldots, x_n)$ definiert, so gilt

$$g(e, x_2, \ldots, x_n) = \psi_e(e, x_2, \ldots, x_n) + 1 \neq \psi_e(e, x_2, \ldots, x_n)$$

und ist $\psi_e(e, x_2, \ldots, x_n)$ undefiniert, so gilt

$$g(e, x_2, \ldots, x_n) = 0 \neq \psi_e(e, x_2, \ldots, x_n)\uparrow .$$

Also $g \neq \psi_e$. Widerspruch. □

Für die Gödelnummerierung φ (mit $\varphi_e = \{e\}$) von $\mathrm{F}^{(1)}(\mathrm{REK})$ aus dem vergangenen Abschnitt definieren wir

$$\begin{array}{ll} K = \{\langle e, x\rangle : \{e\}(x)\downarrow\} & \text{(Allgemeines Halteproblem)} \\ K_d = \{e : \{e\}(e)\downarrow\} & \text{(Diagonales Halteproblem)} \\ K_0 = \{e : \{e\}(0)\downarrow\} & \text{(Initiales Halteproblem)} \end{array}$$

Da φ durch Gödelisierung der Turingmaschinen gewonnen wurde, kann man diese Mengen (etwas ungenau) folgendermaßen interpretieren:

$$\begin{array}{rcl} \langle e, x\rangle \in K & \Leftrightarrow & \text{Die } e\text{-te (normierte) TM hält bei Eingabe } x. \\ e \in K_d & \Leftrightarrow & \text{Die } e\text{-te (normierte) TM hält, wenn sie auf sich selbst} \\ & & \text{(d.h. ihre Gödelnummer) angesetzt wird.} \\ e \in K_0 & \Leftrightarrow & \text{Die } e\text{-te (normierte) TM hält bei Eingabe } 0. \end{array}$$

Satz 12.3 angewandt auf die Gödelnummerierung φ impliziert, dass das allgemeine Halteproblem nicht rekursiv, also nach der Church-Turing-These nicht entscheidbar ist.

12.4 KOROLLAR. *K ist nicht rekursiv.*

BEWEIS. Es gilt

$$(e, x) \in Db(\varphi) \Leftrightarrow \{e\}(x)\downarrow \Leftrightarrow \langle e, x\rangle \in K.$$

Wäre K rekursiv, so wäre also auch $Db(\varphi)$ rekursiv im Widerspruch zu Satz 12.3. □

Die Varianten K_d und K_0 des Halteproblems sind ebenfalls nicht rekursiv. Für K_d folgt dies implizit bereits aus der oben gegebenen Diagonalisierung (s. Übungen), für K_0 zeigt man dies z.B. mit Hilfe der Reduktionsmethode, die wir im nächsten Abschnitt betrachten werden.